

Казахский Национальный университет имени аль-Фараби
РГП на ПХВ Институт информационных и вычислительных технологий
КН МНВО РК

УДК:004.021:536.2

на правах рукописи

АРШИДИНОВА МУКАДДАС ТУРГАНОВНА

**Разработка и исследование вычислительных алгоритмов и программ
для оценки и моделирования теплофизических процессов в стержнях
переменного сечения**

6D070400 – «Вычислительная техника и программное обеспечение»

Диссертация на соискание степени
доктора философии (PhD)

Научные консультанты:
Ташев Азат Арипович,
доктор технических наук,
профессор
Муслум Аричи,
PhD, асс. профессор
Университет Коджаэли, Измит, Турция

Республика Казахстан
Алматы, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

	стр
НОРМАТИВНЫЕ ССЫЛКИ	4
ОПРЕДЕЛЕНИЯ	5
ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ	6
ВВЕДЕНИЕ	7
1 СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ И ПРОГРАММ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СТЕРЖНЯХ	15
1.1 Анализ исследований методов и алгоритмов для моделирования теплофизических процессов в стержнях	15
1.2 Обзор существующих методов по определению термофизических характеристик стержня	25
1.3 Сравнительный анализ существующих пакетов прикладных программ для моделирования задач термодинамики	29
Выводы по первому разделу	36
2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ	37
2.1 Постановка задачи в евклидовом пространстве	37
2.2 Решение уравнения теплопроводности в цилиндрической системе координат	38
2.3 Решение уравнения теплопроводности в евклидовой системе координат	42
Выводы по второму разделу	43
3. РАЗРАБОТКА МЕТОДА ДЛЯ ОЦЕНКИ И МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СТЕРЖНЯХ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ	44
3.1 Формулировка задач теплофизического состояния стержня ограниченной длины и переменного поперечного сечения	44
3.2 Вариационный подход для построения функционала для стержня переменного сечения и метод решения задачи	46
3.2.1 Основы вариационного метода	46
3.2.2 Вариационный метод для теплопроводности	46
3.3 Методы определения теплофизического состояния стержня ограниченной длины и переменного поперечного сечения	54
3.3.1 Определение удлинения стержня ограниченной длины и переменного поперечного сечения и возникающего осевого усилия при наличии теплового потока и теплоизоляций	54
3.3.2 Метод определения величины осевого сжимающего усилия в стержне ограниченной длины и переменного поперечного сечения в случае заземления его концов	55
3.3.3 Определение законов распределения составляющих деформаций и напряжений по длине заземленного двумя концами стержня	56

ограниченной длины и переменного поперечного сечения	
3.3.4 Определение распределения перемещения по длине стержня ограниченной длины и переменного поперечного сечения	57
3.3.5 Расчет перемещения упругих деформаций при наличие источников тепла в стержне ограниченной длины и переменного поперечного сечения	58
3.3.6 Определение перемещения упругой деформации при наличие поля температуры стержня ограниченной длины и переменного поперечного сечения	59
Выводы по третьему разделу	63
4 РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ И ПРОГРАММ ДЛЯ РАСЧЕТОВ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ.	64
4.1 Алгоритмы для оценки теплофизических характеристик стержня переменного сечения	64
4.2 Алгоритм формирования автоматизированной системы исследования термофизического состояния стержня	71
4.2.1 Диаграммы компонентов	71
4.2.2 Разработка модулей программного комплекса	73
4.3 Результаты использования вариационного подхода для оценки термомеханических характеристик стержня переменного сечения	76
4.4 Практическое применение метода оценки термомеханических характеристик стержня ограниченной длины и переменного поперечного сечения при решении конкретных задач в случае квадратичной аппроксимации	76
4.5 Сравнительный анализ численного и аналитического методов решений задачи распределения температуры по длине стержня переменного сечения	78
4.6 Сравнительный анализ точности и оценка сложности вариационного, аналитического и конечно-разностного методов решения	88
Выводы по четвертому разделу	90
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	91
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	92
ПРИЛОЖЕНИЕ А - Программное обеспечение	99
ПРИЛОЖЕНИЕ Б - Свидетельства о государственной регистрации прав на объект авторского права	121
ПРИЛОЖЕНИЕ В - Акт внедрения	124
ПРИЛОЖЕНИЕ Г - Сертификат научной стажировки	126

НОРМАТИВНЫЕ ССЫЛКИ

В настоящей диссертации использованы ссылки на следующие стандарты:
ГОСО РК 5.04.034 – «Государственный общеобязательный стандарт образования Республики Казахстан. Послевузовское образование. Докторантура». Основные положения утверждены министром образования и науки РК. "17" июня 2014 г. №261. Астана, 2011.

«Инструкция по оформлению диссертации и автореферата», Высший аттестационный комитет. -Алматы, 2004 г., No377-3 г.

ГОСТ 7.32-2001 – Отчет о научно-исследовательской работе. Структура и правила оформления.

ГОСТ 7.1-2003 – Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления.

СТ РК ГОСТ Р 51904-2011 Программное обеспечение встроенных систем
Общие требования к разработке и документированию

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В настоящей диссертации применяются следующие термины с соответствующими определениями:

Сплайн функция — функция в математике, область определения которой разбита на конечное число отрезков, на каждом из которых она совпадает с некоторым алгебраическим многочленом (полиномом).

Тепловой поток — объем тепловой энергии, который излучается, переносится или абсорбируется поверхностью за определенный временной интервал, измеренный относительно единицы площади.

Теплоизоляция – способ блокировки или минимизации перехода тепла от одного объекта к другому через использование материала, обладающего малой способностью проводить тепло.

Коэффициент тепловóго расширénия — физическая величина, характеризующая относительное изменение объёма или линейных размеров тела с увеличением температуры на 1 К при постоянном давлении.

СЛАУ– система линейных алгебраических уравнений.

САПР- система автоматизированного проектирования.

Стержень - тело, имеющее поперечные размеры, несоизмеримо малые с его длиной. Стержень может иметь прямолинейную или криволинейную ось, постоянные или переменные по длине размеры и форму сечения.

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

В настоящей диссертации применяются следующие обозначения и сокращения:

T	($^{\circ}C$)	температура
s	(cm^2)	площадь поперечного сечения стержня
T_{oc}	($^{\circ}C$)	температура окружающей среды для торцов стержня
T_{σ}	($^{\circ}C$)	температура окружающей среды для боковой поверхности стержня
q	$\left(\frac{Вт}{cm^2}\right)$	интенсивность теплового потока
a	$\left(\frac{m^2}{сек}\right)$	коэффициент теплопроводности
h	$\left(\frac{Вт}{cm^2 \cdot ^{\circ}C}\right)$	коэффициент теплоотдачи для торцов стержня
h_{σ}	$\left(\frac{Вт}{cm^2 \cdot ^{\circ}C}\right)$	коэффициент теплоотдачи для боковой поверхности стержня
k	$\left(\frac{Вт}{cm \cdot ^{\circ}C}\right)$	коэффициент теплопроводности материала
ρ	$\left(\frac{кг}{cm^3}\right)$	плотность
c	$\left(\frac{Вт}{кг \cdot ^{\circ}C}\right)$	удельная теплоемкость
σ	$\left(\frac{н}{cm^2}\right)$	напряжение
ε_{Δ}		упругая деформация
e_{Δ}		полная деформация
ε_T		температурная деформация
u		перемещение
E	$\left(\frac{н}{cm^2}\right)$	модуль упругости
α	$\left(\frac{1}{^{\circ}C}\right)$	коэффициент теплового расширения

ВВЕДЕНИЕ

В современных условиях экономического развития страны важнейшей задачей является модернизация существующих и создание новых высокоэффективных, надежных, безопасных систем и производств. Об этом свидетельствует обращение президента РК Касым-Жомарта Токаева в XI форуме машиностроителей Казахстана, где говорится «Отечественное машиностроение, являясь локомотивом промышленности показывает рост производства 9,4%, а по итогам первого квартала 2023 года 36%. Нам необходимо добиться ускоренного роста машиностроения на базе инноваций и передовых технологий».

Дальнейшее развитие энергомашиностроения и прежде всего двигателестроения связано с существенным повышением удельных показателей. Опорные элементы являются основными элементами в машиностроении, авиации, металлургии, строительстве, на тепловых и атомных электростанциях и нефтенагревательных станциях, нефтеперерабатывающих заводах. Улучшение надежности и увеличение срока службы опорных элементов, эксплуатируемых при сложных условиях циклических термомеханических и теплофизических нагрузок, стоит в числе ведущих целей современного производства. Оценке надёжности и долговечности предшествует анализ температурного и напряжённно-деформированного состояний исследуемых элементов.

Быстрое развитие вычислительной техники привело к созданию мощных компьютерных систем, расширяя границы возможностей для эффективного применения вычислительных алгоритмов в анализе сложных теплофизических и физико-механических процессов. Однако, эффективность этих алгоритмов зависит от точности и надежности математических моделей, лежащих на их основе. В настоящее время разработка эффективных вычислительных алгоритмов для оценки теплофизических характеристик стержня переменного сечения становится одним из самых обещающих направлений в исследовании температурных условий и состояний, связанных с напряжением и деформацией.

Актуальность диссертационной работы. В таких отраслях как машиностроение, авиация, металлургия, строительство, а также на тепловых и атомных электростанциях, нефтеперерабатывающих заводах и нефтенагревательных установках, ключевые конструктивные элементы часто выполняются в форме стержней с переменным сечением, подвергающихся воздействию интенсивного температурного поля. Надежность работы этих стратегических объектов напрямую зависят от теплофизических характеристик элементов в виде стержней.

Всвязи с вышеперечисленным, моделирование, разработка новых эффективных алгоритмов и на их базе современного программного обеспечения для анализа теплофизических явлений в стержнях с переменным поперечным сечением, подверженных влиянию местных температур, тепловых

потоков, изоляции и обмена теплом, представляет собой важную и актуальную задачу.

Исследование выполнено в рамках проекта грантового финансирования №AP05131093 Математическое и компьютерное моделирование нелинейных термофизических процессов в стержнях переменного сечения, 2018-2020 гг. в Институте информационных и вычислительных технологий КН МНВО РК.

Согласно классификатора специальностей докторантуры PhD Классификатору специальностей высшего и послевузовского образования Республики Казахстан с Номенклатурой специальностей научных работников, Утвержденный приказом Министра образования и науки Республики Казахстан от «21» июня 2010 года № 317, данная работа относится к разделу докторантуры по специальности «6D070400- Вычислительная техника и программное обеспечение» номенклатуры научных работников «01.01.07 Вычислительная математика».

В данной диссертации исследования опираются на труды ученых, представленных ниже.

1. Джордж М. Храниц (George M. Hrnjak) - профессор механической и промышленной инженерии в Университете Иллинойса в Айрвине. Он специализируется на теплопередаче и теплообмене, включая моделирование температурного поля в различных системах.

2. Бернар Молль (Bernard Molle) - профессор теплоэнергетики в Лаборатории теплофизики и теплотехники в Национальной высшей школе механики и аэронавтики (ENSMA) во Франции. Он занимается моделированием теплопередачи и разработкой алгоритмов для решения задач теплопроводности.

3. Джон Д. Андерсон (John D. Anderson) - профессор механического и аэронавтического инженерства в Университете Мэриленда. Он специализируется на теплообмене и численных методах для решения задач теплопроводности.

4. Жан-Луи Лионнель (Jean-Louis Lions) - известный французский математик, работавший в области математического моделирования и численных методов, включая решение задач теплопроводности.

5. Роджер Гримшоу (Roger Grimshaw) - профессор математической физики в Университете Ланкашира в Великобритании. Он занимается исследованиями в области нелинейной динамики и математического моделирования, включая задачи теплопроводности.

6. John H. Lienhard V - профессор Массачусетского технологического института (MIT), специализируется на теплопроводности, теплообмене и численных методах решения задач теплообмена.

7. John R. Thome - профессор Швейцарской федеральной политехнической школы в Лозанне (EPFL), работает в области теплообмена и многофазных течений, включая теплопроводность в стержнях.

8. Brian Spalding - британский ученый, специализируется на численном моделировании и расчетах теплопереноса, включая разработку методов решения задач теплопроводности.

9. Adrian Bejan - профессор Дукаского университета в США, известен своими исследованиями в области теплопереноса и конвекции, включая различные аспекты теплопроводности.

10. Eckhard A. Groll - профессор Пурдьюского университета в США, работает в области энергетических систем и теплопереноса, включая численные методы решения задач теплопроводности.

В разработку и усовершенствование методик решения задач термомеханики значительный вклад внесли: Бакулин В.Н. разрабатывал численные методы для решения инженерных задач, Биргер И.А. занимался проблемами прочности, устойчивости и долговечности машин, был одним из основоположников теории надежности в машиностроении, Олейников А.И. исследовал методы в области тепломассообмена и теплопроводности, Пановко Я.Г. специализируется на задачах по теории устойчивости и вибрации, а также развитием методов анализа надежности конструкций, Писаренко Г.С. Внес значительный вклад в механику деформируемого твердого тела, прочность материалов и теорию упругости, Федоров Ю.А. Специализировался на исследованиях в области прикладной механики и математики, включая задачи теплопроводности, А.Н. Тихонов Известен своими работами по математической физике, в частности, введением и разработкой методов регуляризации для некорректно поставленных задач, А.А. Самарский Внес значительный вклад в теорию разностных схем и вычислительную математику, разработал множество методов для решения дифференциальных уравнений в частных производных, С.К. Годунов Известен своими исследованиями в области численных методов решения задач математической физики, включая разработку схемы Годунова для решения уравнений гидродинамики, В.С. Рябенский Работал над теорией разностных схем и их приложениями к задачам математической физики, Г. И. Марчук Внес значительный вклад в разработку численных методов в метеорологии, ядерной физике и иммунологии, А.В. Лыков Автор теоретических и экспериментальных работ в области тепло- и массообмена, Э.М. Карташов Разрабатывал методы решения задач тепломассообмена и теплопроводности, Н.М. Беляев Известен своими работами по механике и теории упругости, А.А. Рядно Вклад в науку требует уточнения, но возможно относится к области прикладной математики или механики, многие другие.

В настоящее время в нашей стране и за рубежом имеется множество работ, посвященных проблеме воздействия термомеханического процесса на изменение структуры и состава материала конструкции. Из этого множества работ в первую очередь следует выделить авторов нашей страны: Кудайкулов А.К., Калимолдаев М.Н., Аринов Е., Оразбаев Б.Б., Ермаков М.М.

Анализ проведенных исследований подчеркивает несколько важных аспектов. Во-первых, существующие методы изучения термофизического состояния несущих элементов конструкций учитывают влияние на распределение температуры отдельных внешних факторов, но не всегда уделяют должное внимание взаимосвязям между ними. Во-вторых, некоторые исследования в этой области пренебрегают зависимостью между

коэффициентом теплового расширения и модулем упругости от температуры стержня переменного сечения, что может быть существенным важным фактором. В-третьих, в работах, где такие зависимости учитываются, они часто используются в виде постоянных значений, что может не отражать реальное поведение материала.

Таким образом, представляется, что существует значительный потенциал для научных исследований в данной области. Одной из актуальных задач является разработка и исследование вычислительных алгоритмов и программного обеспечения для оценки теплофизических процессов в стержне переменного сечения под одновременным воздействием различных факторов.

Цель диссертационной работы. Разработка вычислительных алгоритмов и программного комплекса для исследования теплофизических характеристик теплоизолированного и нетеплоизолированного стержня переменного сечения.

Задачи исследования.

Согласно поставленной цели, в данной работе решаются следующие задачи:

- исследование термомеханического состояния с использованием вариационного подхода для стержня переменного сечения;
- разработка численного метода и алгоритмов на основе предложенного вариационного подхода для оценки теплофизических процессов в стержнях переменного сечения;
- создание программного комплекса на основе полученных разработанных алгоритмов.
- разработка алгоритма и программного обеспечения для решения задачи теплопроводности в нетеплоизолированном цилиндре с использованием цилиндрической системы координат.

Объект исследования. Теплофизические процессы в стержне переменного сечения.

Предмет исследования. Численные методы и алгоритмы решения задач определения термомеханического состояния стержня переменного сечения, основанные на вариационном подходе.

Методы исследований. Для решения поставленных задач в работе используются: вариационный метод, аналитический метод, методы конечных разностей и конечных элементов, Метод Галеркина.

Информационной базой научной работы являются материалы периодической печати по исследованиям в области термодинамики, монографии, Интернет-ресурсы, материалы научных-практических конференций.

Анализ информации проводился при помощи следующих инструментальных средств языка программирования Python:

1. SciPy - это библиотека для научных и инженерных расчетов, которая включает подмодуль `scipy.integrate` для численного решения дифференциальных уравнений. В частности, функция `odeint` (ordinary

differential equation integration) может использоваться для решения дифференциальных уравнений второго порядка.

2. SymPy - это символьная математическая библиотека, которая позволяет работать с символьными выражениями. Она может использоваться для аналитического решения дифференциальных уравнений второго порядка.

3. NumPy - добавляющая поддержку больших многомерных массивов и матриц, вместе с большой библиотекой высокоуровневых математических функций для операций с этими массивами. Она может быть полезной для решения системы дифференциальных уравнений второго порядка, представленных в виде матричных уравнений.

4. SciKit-learn: Эта библиотека фокусируется на машинном обучении, но она также предоставляет инструменты для численного решения дифференциальных уравнений, включая дифференциальные уравнения второго порядка.

5. Инструментальные средства проектирования Rational Rose.

Применен набор математического аппарата теории матриц, решения алгебраической системы уравнений, численного интегрирования.

Для проведения численного эксперимента разработано программный комплекс ASIR.

Научная новизна. Представленное исследование имеет следующие значительные результаты, которые придают ему научную новизну:

– разработана модель для исследования теплофизических характеристик стержня переменного сечения с использованием вариационного подхода;

– разработаны методы формирования системы линейных уравнений с целью определения закона распределения температуры для теплоизолированного и нетеплоизолированного стержня переменного сечения, что существенно сокращает количество машинных операций;

– разработаны вычислительные алгоритмы для автоматического формирования функционала и определения теплофизических характеристик;

– разработаны алгоритмы и программное обеспечение для решения задачи теплопроводности в нетеплоизолированном цилиндре с использованием цилиндрической системы координат.

Положения, выносимые на защиту.

Методы и алгоритмы исследования теплофизических характеристик стержня в виде усеченного конуса, эксплуатируемый при различных видах теплового воздействия, удовлетворяющий требованиям заданных условиями эксплуатаций.

Эти результаты значительно обогащают область исследований в численном моделировании теплопроводности и расширяют применение таких моделей в различных областях науки и техники. Разработанный метод, алгоритмы и программный комплекс могут быть полезными в инженерных расчетах, а также в других прикладных областях, где важно анализировать теплофизические процессы в структурах с переменными характеристиками и множеством источников тепла.

Практическая значимость работы по разработке и исследованию вычислительных алгоритмов и программ для оценки и моделирования теплофизических процессов в стержнях переменного сечения заключается в следующем: Программный комплекс ASIR позволяет инженерам оптимизировать геометрию и материалы стержней для достижения желаемых тепловых характеристик, что может привести к уменьшению веса, стоимости и повышению эффективности. Понимание теплофизических процессов важно для оценки срока службы и надежности конструктивных элементов, что способствует повышению безопасности. Анализ влияния тепловых процессов на материалы может помочь в разработке новых материалов с улучшенными характеристиками. Полученные алгоритмы и программы могут использоваться в академических целях для обучения студентов и проведения научных экспериментов. Анализ результатов моделирования может служить поддержкой для принятия инженерных и управленческих решений. Алгоритмы могут быть адаптированы и использованы в различных областях, где важно понимание тепловых процессов, таких как биомедицина, аэрокосмическая отрасль, машиностроение. Разработанные методы и инструменты могут найти широкое практическое применение и стать значимым вкладом в развитие соответствующих технологических и научных областей.

Внедрение и апробация разработанных автоматизированных систем в ТОО «ТеплоСнаб» в городе Астана (Акт внедрения № 148 от 12.09.2023 г.) и ТОО «Оңтүстік Жарық Транзит» в городе Шымкент № 776 от 17.10.2023 г. подтверждает реальную применимость и эффективность разработанных методов и программ в производстве. Использование программного обеспечения позволяет компаниям более точно и эффективно решать задачи, связанные с теплофизическими процессами в конструкциях и технологических процессах.

Таким образом, диссертация имеет высокую практическую значимость, поскольку она предоставляет инструменты и решения для реальных инженерных и промышленных задач, а также успешно апробирована в промышленном контексте.

Личный вклад исследователя. Исследователь провел личное решение задач, связанных с диссертационной работой, что подчеркивает его активное участие в процессе исследования и разработки. В рамках работы были выполнены следующие виды исследований:

-аналитическое исследование: Исследователь провел анализ предыдущих работ и разработал алгоритм для оценки теплофизических характеристик стержня переменного поперечного сечения. Этот анализ помог сформулировать математические модели и подходы для решения задачи.

-численное исследование: на основе разработанных математических моделей и алгоритмов, исследователь провел численные расчеты для оценки теплофизических процессов в стержне переменного сечения. Эти расчеты позволили получить количественные результаты и провести анализ в различных условиях.

-разработка программного обеспечения: Исследователь создал архитектуру и программный комплекс ASIR , которая позволяет проводить оценку теплофизических характеристик стержня переменного сечения. Это программный комплекс может быть использовано для решения практических задач в инженерии и науке.

Все эти шаги позволили исследователю разработать комплексный подход к решению задачи и представить новый метод и программный комплекс для оценки теплофизических характеристик стержня переменного сечения ограниченной длины.

Основания для выполнения работы. Диссертационная работа выполнялась в рамках проекта № AP05131093, грантового финансирования МНВО РК, на базе РГП на ПХВ «ИИВТ» КН МНВО РК.

Апробация работы. Основные положения и результаты исследований обсуждались на кафедре «Компьютерных наук» Казахского национального университета им. Аль-Фараби, на семинарах в РГП на ПХВ "ИИВТ" КН МНВО РК, на кафедре машиностроения Инженерного факультета Университета Коджаэли (Измит, Турция), выступлениях на международных научно-практических конференциях.

Достоверность полученных численных результатов подтверждена сравнением с данными других авторов, с результатами аналитических решений и численных экспериментов.

Публикации. Основные научные результаты диссертации изложены в 17 публикациях, в том числе: 2-монографии, 4 - в научных изданиях, рекомендуемых КОКСНВО РК, 2 - в международных научных изданиях, входящих в базу данных Scopus, 1- в международных научных изданиях, 8 - в материалах международных научно- практических конференций, из них:

– 2 статьи в международных научных журналах, индексируемых в Web of Science *с импакт-фактором Q3*: (Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, International journal of mechanics)

– 4 статьи в журналах из списка, рекомендованного Комитетом по контролю в сфере науки и высшего образования МНВО РК (КОКСНВО): (Вестник КазНИТУ, Известия НАН РК. Серия физико-математическая, Вестник КазАТК , Вестник КазУТБ)

– 9 публикаций в материалах международных и республиканских конференций и докладов на научных семинарах:

– на III Международной научно-практической конференции, Украина, г. Переяслав-Хмельницкий, апрель 2018;

– на научной конференции Института информационных и вычислительных технологий МНВО РК "Современные проблемы информатики и вычислительных технологий", г. Алматы, 2-5 июля 2018 г;

– на 16-й Международной конференции «Информационные технологии и менеджмент» / 16th International Conference Information technologies and Management, 2018, Information Systems Management Institute, Riga, Latvia;

– на 5-й Международной конференции по информатике и технике управления / 2018 5th International Conference on Information Science and Control Engineering (ICISCE 2018), Zhengzhou, China July, 2018;

– на 2-й Международной конференции по достижениям в области гражданского строительства, энергетических ресурсов и экологической инженерии, 2020, Наньнин, Китай. Серия конференций IOP: Науки о Земле и окружающей среде / 2nd International Conference on Advances in Civil Engineering, Energy Resources and Environment Engineering, 2020, Nanning, China. IOP Conference Series: Earth and Environmental Science;

– в докладе на 1-й и 2-й Международной конференции по устойчивому развитию науки и технологий, 2018, Анталья-Турция/ 1st International Conference on sustainable on science and technology, 2018, Antalya-Turkey- 2nd International Conference on Sustainable Science and Technology , 2019, Istanbul-Turkey;

– в докладе на 22-м Конгрессе тепловых наук и технологий ULIBTK'19, 2019, Коджаэли – Турция/ ULIBTK'19 22th Congress of Thermal Sciences and Technology, 2019, Kocaeli – Turkey;

– в докладе на 7th Asian Mechanisms and Machine Science Conference (ASIAN MMS 2024);

– на заседаниях научного семинара Института информационных и вычислительных технологий КН МНВО РК;

– на научном семинаре кафедры компьютерных наук факультета информационных технологий КазНУ им. аль-Фараби;

– на семинаре факультета машиностроения Университета Коджаели, Измит, Турция.

Разработанное программный комплекс ASIR для исследования теплофизических процессов в стержне прошли внедрение и апробацию в ТОО «ТеплоСнаб» (г. Астана) и ТОО «Оңтүстік Жарық Транзит» (г. Шымкент) что подтверждается актами производственных испытаний, № 148 от 12.09.2023 г. и № 776 от 17.10.2023 г. соответственно.

Структура и объем диссертации: Диссертация содержит введение, 4 раздела основного содержания, заключение, список использованной литературы (104 источника) и 4 приложения, общий объем работы - 126 страниц, 35 рисунков, 3 таблицы.

1 СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ И ПРОГРАММ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СТЕРЖНЯХ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

1.1 Анализ исследований методов и алгоритмов для моделирования теплофизических процессов в стержнях

Работа [1] представляет собой исследование о конечно-элементном методе, разработанном для анализа термомеханических твердых тел. Авторы обращают внимание на необходимость решения таких задач, как взаимодействие между твердыми телами при наличии тепловых и механических нагрузок. В работе авторы представляют детальную формулировку конечно-элементной процедуры, которая учитывает термическую и механическую связь между соприкасающимися твердыми телами. Они описывают численные методы и алгоритмы, используемые для моделирования теплового и механического поведения материала, а также для определения контактных условий.

В исследовании [2] представлены ключевые формулы теплофизики, охватывающие принципы сохранения массы, движения и энергии. Авторы также изложили кинематические формулы и связанные с ними уравнения, необходимые для полноты системы уравнений. Дополнительно обсуждаются физические ограничения, основанные на энтропии, которая математически отражает второй закон термодинамики.

В [3] работе исследованы различные модели, описывающие физические явления, связанные с термическими свойствами сверхпроводников. Работа основана на применении математических методов, таких как функциональный анализ, вариационное исчисление и численные методы, для решения уравнений и задач, возникающих при исследовании термических свойств сверхпроводников. Автор проводит анализ структуры и свойств системы уравнений, а также рассматривает различные методы численного анализа для получения численных решений.

В работе [4] приведены результаты испытаний некоторых обмоток статора крупных турбогенераторов с воздушным охлаждением, в том числе ухудшение и разрушение изоляции в отверстиях как обычных, так и глобальных статоров VPI из-за вибрации катушек.

Основные теоретические аспекты теплофизики обсуждаются в исследованиях [5-7]. В документе [8] акцент сделан на создании математических моделей, описывающих нелинейное поведение материалов, и их применении в рамках численных методов, основанных на конечных элементах. В этой работе авторы в деталях анализируют разнообразные алгоритмы и подходы для эффективного решения нелинейных задач и представляют примеры их практического применения.

В работе [9] подробно рассмотрены различные аспекты адиабатических полос сдвига, такие как динамика образования, масштабирование, механизмы разрушения и влияние различных факторов, таких как температура, скорость

деформации и структура материала. Автор анализирует различные теоретические модели и экспериментальные подходы, используемые для изучения адиабатических полос сдвига, и обсуждает их преимущества и ограничения.

Автор работы [10] охватывает различные аспекты, связанные с математическими моделями и уравнениями, используемыми в механике континуума. Рассматриваются такие темы, как тензорное исчисление, термодинамика и уравнения состояния для континуума, а также принцип сохранения и вариационные принципы.

Основное внимание уделяется уравнениям Навье-Стокса для несжимаемых и сжимаемых течений, а также уравнениям упругости для рассмотрения поведения твердых тел. В книге представлены основные выводы и объяснения метода конечных элементов, используемого для численного анализа задач механики континуума.

В исследовании [11] представлен подход к моделированию устойчивых тепловых напряжений в конструктивных элементах, подвергающихся влиянию местных температур, тепловых потоков, процессов теплообмена и изоляции, включая описание соответствующего программного обеспечения. Отмечается, что коэффициент теплового расширения рассматривается как полностью зависимый от температуры. Предложенный расчетный алгоритм и методология демонстрируют универсальность для анализа постоянных тепловых напряжений в несущих структурах, функционирующих под воздействием локальных температурных условий, тепловых потоков, обмена теплом и сохранения тепла. Для каждой отдельной единицы создается функционал, отражающий ее общую тепловую энергию, как указано в работах [12,13].

Исследования, представленные в работах [14,15], фокусируются на разработке методов и вычислительных алгоритмов для анализа температурного распределения, деформаций и напряжений вдоль стержня, подвергающегося воздействию тепловых потоков с обеих его концов. При этом особое внимание уделяется взаимодействию боковой поверхности стержня с окружающей средой и физико-механическим характеристикам объекта исследования. Термодинамические аспекты, а также процессы возникновения, роста и влияния напряжений на мартенситные превращения рассматриваются в работах [16-19]. В статье [20] освещается тема нестационарного распределения температур в цилиндрических стержнях под действием лазерного излучения, предлагая результаты, применимые в изучении динамических тепловых процессов, вызванных лазерными источниками.

В исследованиях [21-23] обсуждаются вычислительные подходы, алгоритмы и специализированное программное обеспечение для анализа устойчивого теплового, напряженного и деформированного состояний однородных стержней ограниченной длины с постоянным поперечным сечением, под влиянием локальных тепловых потоков и температур, с учетом теплообмена и локальной теплоизоляции. В рамках каждого исследования выявлены ключевые закономерности, определены стационарные

температурные поля, деформации, напряжения и перемещения. Также представлены методики для расчета изменений длины и возникающих осевых сжимающих сил, анализирована сходимость методов и точность численных результатов.

Определение закона распределения температуры для стержня, через который вводится тепловой поток, а на другом конце находятся конечные элементы, рассматривается во многих работах. В работе [24] рассматривается теплоизолированный стержень переменного сечения, теплообмен с окружающей средой с одного конца. Проведено сравнение решений, полученных энергетическим и аналитическим методами. В работе [25] стержень переменного сечения разделен на три части. В средней части поддерживается постоянная температура, остальные части не теплоизолированы. Теплообмен с окружающей средой происходит на боковой поверхности нетеплоизолированной части и на торцах.

Исследования, представленные в публикациях [26,27], посвящены анализу температурных процессов и связанных с ними напряжений в объектах разнообразных форм, включая пластины с различными контурами, стержни с изменяющимся поперечным сечением, а также круглые и некруглые цилиндры, и слои с градиентом теплопроводности по толщине.

В работе [28] изложены основы теории упругости с решением практических инженерных задач. В работе [29] представлены методы расчета и алгоритмы численного решения класса задач прикладной механики.

В публикации [30] представлены ключевые формулы теплофизики, охватывающие принципы сохранения массы, движения и энергии. Авторы также излагают кинематические уравнения и дополнительные соотношения, необходимые для комплектации системы уравнений. Анализ работы показывает, что, во-первых, существующие методы исследования термомеханического состояния несущих элементов конструкций учитывают влияние на распределение температуры тела отдельных внешних факторов: либо теплоизоляции, либо теплообмена с окружающей средой, либо теплового потока и температуры.

Фундаментальные теоретические вопросы теплофизики изложены в работах [31,32]. В работе [33] рассмотрены характеристики контактного теплообмена на границе раздела распределенного крепления стержня ротора при различных воздействиях и с учетом шероховатости различных колесных дисков. Исследован термодинамический расчет стержневой опоры ротора. Разработана и изготовлена установка для испытания характеристик теплоотдачи ротора со стержневым креплением. Температурное поле ротора со стержневым креплением измеряется по изменению силы тяги и шероховатости поверхности колеса. Полученные результаты показывают, что коэффициент теплоотдачи поверхности шарнира увеличивается с увеличением предварительного натяжения стержня и уменьшается с увеличением шероховатости поверхности колеса. В работах представлены результаты численного исследования теплового напряженно-деформированного состояния

балки под действием лазерных лучей. При этом использовался метод конечных элементов [34].

В работе [35] на основе метода малых параметров рассматривается задача определения напряженно-деформированного состояния жесткой пластиковой трубы при наличии температуры. Использовался контракт Мизеса. Работа [36] представляет собой введение в некоторые из лучших практик, развившихся в последние годы в области нелинейного конечно-элементного моделирования. В работе представлена неустойчивость материала, известная как адиабатическая полоса сдвига, которая часто возникает в пластически деформируемом материале, когда он подвергается быстрому сдвигу [37]. В работе представлены основные принципы нелинейной механики сплошной среды [38]. В работе [39] анализируется распределение температуры внутри стержня ядерного топлива. Это необходимо для предотвращения выброса опасных продуктов деления в окружающую среду. Для этого максимальная температура топлива не должна превышать предел его целостности. Распределение температуры топлива получается путем расчета процесса теплообмена внутри твэла. Множественные процессы теплообмена с различными режимами теплопередачи представляют интерес и важны для обеспечения безопасности ядерного топлива. В данной работе показана применимость CFD FLUENT и получено аналитическое решение для расчета распределения температуры внутри стержня ядерного топлива.

В работе [40] тепловые характеристики лазера получены путем численного решения уравнения теплопроводности. Распределения температуры в осевом и радиальном направлениях получены в цилиндрических координатах. Рассчитано время теплового перехода в обоих направлениях, а также тепловое фокусное расстояние. Поведение распределения температуры во времени проиллюстрировано на трехмерной диаграмме. В работе [41] отмечается, изменение твердости и прочности микроструктуры нержавеющей и заэвтектоидной стали, при сварке трением. В данной работе исследовалось нестационарное распределение температуры в сварном соединении трением. Для оценки переходного распределения температуры использован численный метод на основе тепловых сетей. Также исследованы изменения микроструктуры образца. Предварительные прогнозы сравниваются с реальными экспериментальными данными, полученными при сварке в идентичных условиях.

В работе [42] получены основные расчетные соотношения пространственного изгиба с растяжением, поперечным сдвигом и кручением для стержня прямоугольного сечения, состоящего из различных конструкционных материалов. Используется гипотеза Тимошенко. Полученные соотношения позволяют проводить приближенные постановки и решения различных прямых и обратных задач, в том числе: определение напряженно-деформированного состояния детали стержня под действием тепловой нагрузки; оценка прочности и жесткости стержня. В данной работе не

учитывается зависимость коэффициента теплового расширения и модуля упругости от температуры стержня при условии его заземления.

В работе [43] с помощью автономного симулятора горячей прокатки и численного моделирования исследовано тепловое поведение прутка в процессе горячей прокатки. Кроме того, для более детального понимания теплового поведения прутка в процессе горячей прокатки проводилось его сравнение с характеристиками листа при плоской прокатке. Температура прутка и листа в процессе горячей прокатки измерялась в нескольких точках с помощью термопар с использованием симулятора прокатки, полученная температура каждой области заготовки анализировалась с помощью численного моделирования. Метод конечных элементов представлен в [44]. В работе [45] для снижения нагрева стержня оценки его эффективности были разработаны шесть типов стержней. При этом температурное поле стержней моделировалось и рассчитывалось методом конечных элементов для получения распределения температуры. Результаты показали, что наибольшую температуру имеет необработанный стержень, причем температура выше в середине и ниже на обоих концах, а также на поверхности внешнего диаметра. Распределение температуры нарезанных стержней было относительно более равномерным. В работе исследовалось нестабильное распределение температуры в цилиндрических стержнях под влиянием лазерного нагрева. В этих работах некоторые значения теплофизических параметров стержня используются как константы.

Изучение закономерностей распределения теплофизических свойств в стержнях ограниченной длины под действием различных источников тепла лежит в основе анализа термически индуцированных напряжений и деформаций в критически важных конструктивных элементах, таких как компоненты энергетических систем, двигателей внутреннего сгорания и водородных двигателей. В этой области активно работают многие выдающиеся ученые, стремясь определить температурное поле в твердых телах, подвергающихся деформации. Например, исследование [46] использует метод конечных элементов для выявления закона распределения температуры вдоль стержня фиксированной длины и с постоянным поперечным сечением. Отдельно, работа [47] фокусируется на анализе стационарного состояния температурного поля в горизонтальном стержне с изоляцией по боковой поверхности, ограниченном по длине и с однородным поперечным сечением. Здесь тепло подается на левый конец с постоянной интенсивностью, в то время как на правом происходит конвективный обмен теплом с окружающей средой, при этом коэффициент теплоотдачи и температура среды предполагаются неизменными.

В исследовании [48] изучается, как температура влияет на деформацию анализируемого компонента, и аналитически выводится закон, описывающий распределение температуры вдоль стержня с теплоизоляцией на боковой поверхности. В этом контексте, левый конец стержня подвергается воздействию теплового потока, тогда как с правого конца происходит обмен

теплом с внешней средой. Анализ также охватывает определение температурного поля в горизонтальном стержне с фиксированным поперечным сечением, где на левый конец воздействует постоянная температура, в то время как остальные поверхности участвуют в теплообмене с окружающей средой. Результаты этого исследования находятся в хорошем соответствии с данными, представленными в работе [49].

В публикации [50], используя принципы сохранения энергии и вариационные методы, исследуется обмен теплом между деформирующейся оболочкой и окружающей её жидкостью. Исследование, представленное в [51], с помощью метода конечных элементов затрагивает процессы теплопередачи в элементах конструкций ядерных энергетических систем, а также описывает комплекс специализированного программного обеспечения, созданного на основе передовых программных инструментов для анализа этих процессов, подчеркивая его универсальность. В работе [52] рассматривается изменчивое температурное поле в цилиндрических стержнях под влиянием лазерного излучения, предоставляя данные, которые могут быть применены для изучения динамических температурных изменений в стержнях при воздействии лазеров.

В публикации [53] излагаются методы и алгоритмы вычислений, а также разработанный набор программного обеспечения для анализа стабильного теплового, напряженного и деформированного состояний стержней с ограниченной длиной и фиксированным поперечным сечением, подверженных воздействию местных тепловых потоков и температур, обмена теплом, с учетом присутствия локальных теплоизоляционных материалов. В работе выделены ключевые закономерности для каждой изучаемой проблемы, определены равновесные состояния температур, деформаций, напряжений и перемещений для определенных случаев.

В статье [54], разработано вариационное уравнение для решения задач термоупругости, включая тепловые источники и стоки, а также учитывающее необратимые процессы в термоупругом взаимодействии. Для получения уравнения использовались соотношения Дюгамеля-Неймана для изотропных материалов, при этом предполагалось, что упругие и тепловые свойства материала остаются постоянными при различных температурах. В процессе вывода уравнения варьировались как механические, так и температурные параметры

В исследовании [55] вводится вариационный принцип, связанный с термоупругостью, который формулируется для изотропных материалов при малых деформациях, основываясь на взаимосвязи между напряжениями, деформациями и изменениями температуры. В случае, когда задача термоупругости рассматривается как несвязанная, из принципа, предложенного в [56], вытекает принцип возможных перемещений.

В исследованиях [57-58], вариационные методы используются для анализа термомеханических свойств тел одномерных, двумерных и трехмерных с простыми формами, где анализируется лишь ограниченное количество дискретных элементов.

Автор работы [59] предлагает альтернативный метод формулировки вариационных принципов термоупругости. Этот метод включает процедуру умножения уравнений равновесия и теплопроводности на независимые вариации перемещения и энтропии соответственно, с последующим интегрированием полученных выражений по всему объему исследуемого тела. Здесь вектор энтропии интерпретируется как количество тепловой энергии, проходящее через единицу поверхности в заданном направлении, нормализованное к абсолютной температур.

В публикации [60], применение метода конечных элементов демонстрируется на примере анализа состояния напряжений, деформаций и температурного распределения в сложном многослойном объекте вращения с уникальным меридиональным сечением. В данной модели предполагается, что различные слои объекта соединены таким образом, что они не испытывают предварительного напряжения и не допускают относительного скольжения во время деформации. Объект подвергается нестационарному осесимметричному нагреву через конвективный обмен теплом с окружающей средой, при этом между слоями сохраняется идеальный тепловой контакт. На тело также действуют осесимметричные внутренние (инерционные) и внешние силы, не приводящие к его закручиванию. Внешняя температура, а также внешние и внутренние силы изменяются в зависимости от координат и времени, а теплофизические и механические свойства материала изменяются в зависимости от температуры.

В работе [61] представлен универсальный вариационный принцип, который охватывает не только стандартные уравнения динамики и теплопередачи, включая соответствующие естественные граничные условия для сил и теплового потока, но также предусматривает условия разрывов на заданных внутренних поверхностях или границах. Этот новаторский вариационный принцип для термоупругих сред разработан на базе принципа виртуальных работ и включает квадратичную форму свободной энергии, которая учитывает анизотропию материала. В рамках данного принципа осуществляется варьирование как механических, так и термических параметров процесса. Этот принцип можно считать аналогом известного принципа Ху-Васидзу [56].

В публикации [62] применяется квазистатический подход для анализа линейных задач термоупругости, основанный на гибридном использовании принципа Хеллингера-Рейсснера. Этот подход включает модифицированный принцип минимальной потенциальной энергии для анализа упругих свойств и аналогичный принцип для изучения теплопередачи. При этом предполагается, что упругие модули и тепловые характеристики материала остаются константами, независимо от деформации и температуры. В процессе разработки вариационного принципа происходит варьирование перемещений, напряжений, температуры и теплового потока.

В исследовании [63] задача термоупругости формулируется через принцип виртуальной работы, причем для описания используется функция

свободной энергии, структура которой схожа с той, что применяется в линейной изотропной термоупругости для случаев малых деформаций. В работе задействуются энергетически сопряженные тензоры напряжений и деформации Коши-Грина, что приводит к получению условий равновесия и соотношения, аналогичного уравнению теплопроводности, в вариационной форме.

В статье [64] разрабатывается модифицированная версия функционала Хеллингера-Рейсснера для моноклинических материалов, применяемая к задачам термоупругости с комбинированными граничными условиями. Это расширение классического функционального выражения позволяет учитывать специфику моноклинических материалов и обеспечивает возможность решения задач с различными типами граничных условий.

Все это позволяет утверждать, что целесообразно провести исследование по разработке математической модели термомеханического состояния стержня ограниченной длины и переменного сечения, учитывающей одновременное влияние локальной температуры, теплоизоляции и теплообмена с окружающей средой.

В [65-66] рассматривается распределение температуры в прямоугольном параллелепипеде с использованием метода конечных разностей. Представлены общие выражения для трехмерного прямоугольного параллелепипеда под воздействием источника тепла произвольного объема и произвольного начального распределения температуры, когда на шести плоских поверхностях заданы зависящие от времени граничные условия конвективного типа.

Решение трехмерных задач теплопроводности методом фиктивных канонических областей посвящена [67-68]. Метод основан на выборе базисной функции и позволяет получать высокоточные решение для областей сложной конфигурации. Этот метод может применяться только для решения линейных краевых задач математической физики.

В публикациях [69-70] анализируется горизонтальный стержень с ограниченной длиной и изменяющимся поперечным сечением, при этом предполагается, что его боковая поверхность полностью теплоизолирована. Тепловая энергия подводится к левому концу стержня, в то время как на правом конце осуществляется теплообмен с внешней средой. Используя вариационный метод, исследуются температурное распределение внутри стержня, а также определяются осевые нагрузки, законы, описывающие распределение деформаций, напряжений и перемещений.

В [71] данной работе предлагается использование разностных схем для уравнения теплопроводности на криволинейных сетках в терминах тепловых потоков, основанный на вариационном принципе. Исследуются свойства разностных операторов и вопросы устойчивости и аппроксимации.

Вариационный подход для оценки распределения температуры в теле формы прямоугольного параллелепипеда рассматривается в [72]. Новизной данного исследования является вариационный подход для оценки распределения температуры в теле прямоугольной формы параллелепипеда,

когда тепловой поток поступает на одну из граней прямоугольного параллелепипеда, а теплообмен с окружающей средой происходит на противоположной стороне.

В [73] разработаны компьютерные программы для расчета нестационарной и стационарной теплопроводности в двух и трех измерениях. Они называются HEAT2 (Blomberg, 1990, 1991) и HEAT3 (Бломберг, 1993а, 1994а). Был использован метод последовательной сверхрелаксации, что в стационарном случае прост в использовании и эффективен. Применен также другой метод — метод подразделения, который означает постепенное изменение сетки. Анализ показывает, что этот метод в некоторых случаях уменьшает время процессора.

Существует так же другие подходы для исследования теплопроводности.

Аналитическое решение для определения закона распределения температуры в прямоугольном параллелепипеде с использованием функции Бесселя получено в работе [74].

Исследованию теплопроводности в прямоугольном параллелепипеде посвящена работа [75]. Отмечается, что теплопроводность в твердых телах простой геометрической формы, таких как прямоугольный параллелепипед, имеет большое значение, поскольку такие формы распространены на практике.

Применение полинома Якоби и многомерной A_{α} -функции к теплопроводности в неоднородном движущемся прямоугольном параллелепипеде рассматривается в [76-77].

В [78] предлагается подход с использованием метода граничных элементов для исследования термических напряжений в трехмерных анизотропных твердых телах, когда задействован внутренний источник тепла. В работе представлено аналитическое преобразование объемного интеграла в граничное интегральное уравнение за счет наличия внутреннего объемного источника тепла.

В [79] рассмотрено трехмерное нестационарное уравнение теплопроводности, учитывающее наличие конвективных слагаемых и фазовых переходов. Для учета фазовых переходов использована модель со сглаженными теплофизическими характеристиками.

В [80] исследуется трехмерное уравнение переходной теплопроводности. Уравнение решается путем аппроксимации пространственных производных второго порядка центральными разностями в цилиндрических координатах в пять точек.

В [81] исследуется переходная область между двумя твердыми телами, состояние которых отличается от состояния контактирующих сред. Малая толщина промежуточной области позволяет свести трехмерную задачу к двумерной для срединной поверхности, наделенной эквивалентными физическими свойствами.

В [82] описывается приближенный метод расчета температурного поля в твердых телах, прогреваемых конвекцией и радиацией одновременно, когда теплофизические свойства вещества зависят от термомеханических

характеристик. В работе представлен пример расчета радиационно-конвективного прогрева неограниченной пластины, в процессе которого теплоемкость и теплопроводность материала меняются вместе с температурой.

В инженерной практике часто приходится рассчитывать нестационарное температурное поле в плоской стенке. Для решения таких задач в [84] разработан сплайн-метод, позволяющий моделировать процесс теплопроводности для бесконечно протяженной пластины.

Исследование [83] фокусируется на численных методиках для анализа задач переходной теплопроводности, учитывая задержку теплового потока. В нём разработана математическая модель, основанная на гиперболических уравнениях теплопроводности, для изучения температурного распределения в двухслойной бесконечной пластине с предположением идеального теплового контакта между слоями. Решение задачи о динамике теплопроводности в двухслойной пластине, с учетом ограниченной скорости теплового потока, достигается через применение конечно-разностного метода и метода прогонки.

В статье [84] представлен метод, который позволяет применять разрывной метод Галеркина для вычисления распределения термомеханических параметров в системе "твердое тело — газ", включая анализ температурного разрыва на границе между газом и твердым телом.

Работа [85] предоставляет понятное описание процессов теплопроводности в условиях как стационарного, так и нестационарного теплообмена, включая передачу тепла через стенки, углы и пластины, а также формулирует принципы теплопроводности в присутствии внутренних источников тепла. В разделе, посвященном конвективному теплообмену, обсуждаются основы теории подобия и моделирования теплоотдачи.

В [86] представлены основы расчета теплопередачи через слой вещества. Представлены и проанализированы решения задач теплопередачи через многослойные пластинки, через слои веществ, ограниченные стенками, при тепловыделении в слое. Рассмотрены случаи цилиндрических и сферических слоев.

В [87] изложены основные задачи нестационарной теплопроводности и диффузии, встречающихся в теории тепло- и массообмена, в инженерных теплотехнических расчетах разнообразной аппаратуры энергетической, химической, а также в производстве строительных материалов.

Обзор современных исследований в области теплопроводности показывает, что большинство работ сосредоточено на прямых численных методах, таких как методы конечных разностей, конечных элементов и конечных объемов. Эти методы прямого моделирования эффективны для решения широкого спектра задач, связанных с передачей тепла, и обладают достаточной точностью в случаях со простой геометрией и граничными условиями.

Однако вариационные методы, которые представляют собой альтернативный подход к решению задач теплопроводности, в настоящее время не получают достаточного внимания в исследовательском сообществе.

Вариационные методы основаны на принципе минимизации функционала, который описывает физическую систему, и могут предложить ряд преимуществ, включая лучшее понимание общей физики процесса и способность обеспечивать более общие решения.

Применение вариационных методов в исследовании закона распределения температуры может открыть новые перспективы в понимании процессов теплопередачи, особенно в системах со сложными граничными условиями или неоднородными материалами. Эти методы могут также обеспечить более глубокое понимание оптимального распределения ресурсов и энергии в различных инженерных и физических процессах.

Таким образом, существует значительный потенциал для дальнейших исследований в области применения вариационных подходов к анализу распределения температуры и других термомеханических характеристик, что может привести к новым открытиям и улучшению существующих технологий теплопроводности.

1.2 Обзор существующих методов по определению термофизических характеристик стержня

Наилучшим способом решения физических задач, в которых используются дифференциальные уравнения, является получение аналитических решений. Однако существует множество сценариев, когда получить аналитическое решение оказывается крайне сложно. Рассматриваемая область может быть столь разнообразной, что точно определить ее математические границы бывает невозможно. Конфигурация системы может включать несколько различных материалов, части которых часто сложно математически описать. Задачи с анизотропными материалами обычно представляют сложности при аналитическом решении, так же, как и задачи, содержащие нелинейные компоненты. В таких случаях приходится прибегать к численным методам для получения приближенных решений, поскольку аналитические решения становятся недостижимыми. Все численные решения предоставляют значения только в определенных дискретных точках для конкретных наборов независимых параметров. Этот процесс повторяется при каждом изменении этих параметров. Полученные значения предоставляют важную информацию о физическом процессе, несмотря на то, что они доступны только в дискретных точках. Существует несколько методов для получения численных решений дифференциальных уравнений (2.1, 2.2).

Существуют следующие группы методов для численного решения дифференциальных уравнений:

- метод конечных разностей;
- метод конечных элементов;
- вариационный метод;
- взвешенный остаточный метод.

Метод конечных разностей можно использовать для решения задачи переноса тепла, течения жидкостей, когда границы параллельны координатным осям. Если не так, то трудно разработать общий алгоритм решения задачи.

Метод конечных разностей аппроксимирует производные в дифференциальном уравнении, в результате которого получается разностные уравнения. Этот метод полезен для решения задач теплообмена и механики жидкости и хорошо работает для двумерных областей с границами, параллельными осям координат. Метод, однако, является довольно громоздким, когда области имеют изогнутые или нерегулярные границы, и в таких случаях сложно написать общие компьютерные программы для этого метода.

Вариационный метод включает в себя интеграл от функции, который является числом. Каждая новая функция производит новое число. Функция, которая производит наименьшее число, обладает дополнительным свойством-удовлетворяет рассматриваемое дифференциальное уравнение.

В вариационном исчислении показывается, что конкретное уравнение $y = g(x)$, которое дает наименьшее числовое значение для функционала, является решением дифференциального уравнения [54-56].

Для данного дифференциального уравнения приближенное решение может быть получено путем подстановки различных пробных функций в соответствующий функционал. Пробная функция, которая дает минимальное значение функционалу, является приближенным решением.

Вариационный метод позволяет найти приближенные решения сложных дифференциальных уравнений и минимизировать функционалы, что делает его полезным инструментом в науке и инженерии.

Вариационный метод является основой для многих конечно-элементных формулировок, но имеет существенный недостаток: *он не применим к любому дифференциальному уравнению, содержащему первый производный член.*

Взвешенные остаточные методы также включают в себя интеграл. В этих методах приближенное решение подставляется в дифференциальное уравнение. Поскольку приближенное решение не удовлетворяет уравнению, возникает остаточный или ошибочный член $R(x)$.

Остаток $R(x)$ умножается на весовые функции $w_j(x)$, и интеграл от произведения должен быть равен нулю. Количество весовых функций равно числу неизвестных коэффициентов в приближенном решении. Есть несколько вариантов для весовых функций.

Рассмотрим некоторые из наиболее популярных вариантов.

Метод размещения. В качестве весовых функций выбираются импульсные функции $w_j(x) = \delta(x - x_j)$. Этот выбор эквивалентен требованию исчезновения остатка в определенных узлах. Количество выбранных точек равно количеству неопределенных коэффициентов в приближенном решении.

Метод поддомена. Для каждой конкретной области выбирается весовая функция, которая устанавливается равной единице, то есть $W(x) = 1$. Это условие означает, что интеграл от остатка должен быть равен нулю на всем интервале, принадлежащем данной области. Количество интервалов, на которых проводится интегрирование, соответствует количеству неизвестных коэффициентов в приближенном решении.

Метод Галеркина. Метод Галеркина использует те же функции для $w_j(x)$, которые использовались в приближенном решении. Этот подход является основой метода конечных элементов для многих задач. Он работает с членами дифференциального уравнения, *включающие первые производные*. Этот метод дает тот же результат, что и вариационный метод при применении к самосопряженным дифференциальным уравнениям.

Метод наименьших квадратов. Метод наименьших квадратов использует остаток $R(x)$ в качестве весовой функции и минимизируется функционал:

$$J = \int R^2(x) dx$$

Эта ошибка минимизируется относительно неизвестных коэффициентов в приближенном решении. Метод наименьших квадратов использовался для формулировки решений конечных элементов, но он не так популярен, как метод Галеркина и вариационный подход.

Вариационный метод и взвешенные остаточные методы каждый включает в себя интеграл. Эти методы могут быть сгруппированы под заголовком интегральных формул. *Численное решение, основанное на интегральной формулировке, является новой концепцией для многих исследований.*

Метод взвешенного метода наименьших квадратов (WLS): Этот метод адаптирован для ситуаций, когда ошибки в данных имеют различные дисперсии и известны веса для наблюдений. WLS позволяет получить более эффективные оценки параметров.

Обобщенный метод наименьших квадратов (GLS): GLS используется для моделирования данных с коррелированными ошибками и/или переменной дисперсией. Веса могут быть использованы для учета структуры корреляции и гетероскедастичности.

Метод инструментальных переменных (IV): Этот метод используется для борьбы с эндогенностью (внутренней эндогенностью) в регрессионных моделях. Он включает в себя оценку системы уравнений с помощью инструментальных переменных, которые могут быть взвешены в зависимости от их роли.

Взвешенный метод наименьших квадратов с фиксированными эффектами (FE-WLS) и случайными эффектами (RE-WLS): Эти методы используются в панельных данных для учета индивидуальных или временных фиксированных или случайных эффектов с учетом весов.

Метод оценки максимального правдоподобия (MLE): Взвешенный MLE используется для оценки параметров статистических моделей с учетом весов для различных наблюдений. Он может быть применен к различным моделям, включая линейные и нелинейные.

Обобщенные линейные модели (GLM): GLM позволяют моделировать зависимость между зависимой переменной и набором предикторов с учетом весов и различных распределений ошибок.

Метод конечных элементов (МКЭ) - это мощный численный метод, который широко используется в инженерии и науке для анализа и решения различных задач. Как уже отмечалась метод конечных элементов является широко принятой численной процедурой для приближенного решения многих дифференциальных уравнений [47,48]. Вот некоторые из главных преимуществ использования МКЭ:

1. Универсальность: МКЭ является универсальным методом и может быть применен к широкому спектру инженерных и научных задач, включая структурный анализ, теплообмен, электродинамику, гидродинамику, акустику и другие физические явления;

2. Гибкость в моделировании геометрии: МКЭ позволяет моделировать сложные и нестандартные геометрии, включая трехмерные объекты, с высокой точностью;

3. Учет неоднородных и нелинейных материалов: МКЭ позволяет моделировать материалы с различными механическими и термическими свойствами, а также учитывать нелинейное поведение материалов, такое как пластичность и упруго-пластические деформации;

4. Адаптивность сетки: МКЭ позволяет использовать адаптивные сетки, которые могут быть более подробными в областях интереса и менее плотными в других частях, что позволяет улучшить эффективность и точность анализа;

5. Точность: При использовании достаточно подробной сетки и правильных численных методов МКЭ обеспечивает высокую точность в расчетах;

6. Способность моделировать граничные условия: МКЭ легко учитывает разнообразные граничные условия, включая фиксированные, нагруженные, смешанные;

7. Исследование динамических и статических явлений: МКЭ может использоваться для анализа как статических, так и динамических задач, включая вибрации, удары, статические нагрузки и динамические нагрузки;

8. Инженерные инструменты: Существует множество коммерческих и открытых программных пакетов, предназначенных для применения МКЭ, что делает его доступным и удобным для инженеров;

9. Возможность оптимизации: МКЭ может использоваться для оптимизации формы, размеров и распределения материалов в конструкции, что позволяет создавать более эффективные и легкие конструкции.

Не требуется, чтобы материалы, из которых состоят соседние элементы, были идентичными. Это дает возможность использовать метод для объектов, собранных из различных материалов. Области с криволинейными границами могут быть аппроксимированы с использованием элементов прямолинейной формы или точно описаны с применением криволинейных элементов, что делает метод применимым к объектам с любым типом границ. Возможность изменения размеров элементов позволяет адаптировать сетку разбиения объекта на элементы в зависимости от конкретных требований, делая ее более крупной или более мелкой по необходимости. Метод конечных элементов

(МКЭ) позволяет легко учитывать граничные условия с разрывными поверхностными нагрузками и смешанные граничные условия. Области могут состоять из неоднородных элементов.

1.3 Сравнительный анализ существующих пакетов прикладных программ для моделирования задач термодинамики

На практике проведение естественных экспериментов в области теплопроводности часто является сложной или чрезмерно дорогостоящей задачей. Например, наблюдение и измерение параметров физических процессов в электрометаллургической печи представляют значительные трудности и в большинстве случаев оказываются невозможными. Попытки моделирования на лабораторных установках сталкиваются с проблемой переноса результатов на промышленные масштабы. Существует сложность в обеспечении полного соответствия всех физических процессов, что практически всегда невозможно. В большинстве случаев приходится ограничиваться соблюдением определенных критериев подобия, которые выбираются на основе определенных соображений.

Также следует учитывать, что масштабные модели не всегда способны точно воспроизвести все характеристики реальных объектов. Кроме того, проведение экспериментов и учет погрешностей измерительного оборудования представляют собой значительные трудности, которые играют важную роль во многих случаях.

Альтернативой затратным экспериментам является компьютерное моделирование на соответствующих моделях. Основные преимущества компьютерного моделирования, согласно источникам, включают:

1. Низкая стоимость: затраты на компьютерное моделирование обычно значительно меньше, чем на проведение аналогичных экспериментов.

2. Высокая скорость расчетов: время, необходимое для проведения численных расчетов, как правило, существенно меньше, чем для выполнения экспериментов.

3. Полнота информации: компьютерное моделирование, которое дает возможность всесторонне изучить все переменные, которые фигурируют в дифференциальных уравнениях, включая такие параметры, как скорость, давление, температура и концентрация.

4. Моделирование реальных и идеальных систем: компьютерное моделирование позволяет исследовать как реальные, так и идеальные системы, что может быть полезно при разработке оптимальных конструкций.

В большинстве случаев затраты на машинное время для компьютерного моделирования существенно ниже, чем стоимость экспериментальных исследований. Этот фактор становится решающим при масштабировании и усложнении изучаемых физических процессов.

Время, затрачиваемое на численные расчеты, обычно существенно короче времени, требуемого для проведения эксперимента. К тому же, возможность оперативного проведения серии расчетов и выбора оптимальной конструкции

делает компьютерное моделирование привлекательным для инженеров, использующих соответствующие программные средства.

Полнота информации, получаемой при компьютерном моделировании, заключается в способности определить все переменные, такие как скорость, давление, температура включенные в дифференциальные уравнения. В отличие от эксперимента, где невозможно одновременно определить все параметры во всей изучаемой области, компьютерное моделирование предоставляет более полную информацию о процессах. В некоторых случаях эксперименты могут предоставить данные для построения математической модели, которая затем исследуется с использованием численных методов.

Возможность проведения компьютерного моделирования как реальных установок, так и установок в идеальных условиях, обусловлена потребностью получения численных решений для даже самых сложных реальных процессов. Это создает особые требования в отношении экспериментального исследования и выявления закономерностей и особенностей физических процессов, а также установления фундаментальных закономерностей. Примером идеализированных исследований могут служить анализ двумерных процессов.

Среди недостатков численного моделирования, в первую очередь, можно выделить ограничения в количественной выразительности закономерностей. Также стоит отметить трудности, с которыми сталкиваются задачи с сложной геометрией, сильными нелинейностями и существенными изменениями свойств расплавов. Важно также учитывать проблему обеспечения достоверности и адекватности полученных результатов по отношению к реальным процессам. В этих случаях требуется подтверждение полученных данных с помощью экспериментальных исследований

Существует несколько программных пакетов, предназначенных для создания и разработки производственных объектов, а также для создания технической документации. Эти программы объединяются под термином "Системы автоматизированного проектирования и производства" (САПП), включая CAD/CAM/CAE/PDM-системы [89].

CAE-системы включают программные продукты, которые способны выполнять расчеты, анализировать и моделировать физические процессы в различных областях, таких как механика, термодинамика, акустика, электродинамика, электромагнетизм и биоинженерия [90,91]. Их разнообразие создает сложности при выборе подходящего программного продукта и оценке его функциональных возможностей.

В таблице 1.1 представлен обзор основных программ и программных комплектов, пригодных для решения инженерных задач в области машиностроения, где их функциональность выделена знаком "+".

Согласно современным тенденциям, моделирование разнообразных технических задач наиболее эффективно проводить с использованием стандартных программных пакетов. Несмотря на стремление современных пакетов программного обеспечения к автоматизации решения задач и повышению качества эксплуатации, а также расширению их

функциональности, необходимо проводить предварительный анализ доступных стандартных программных пакетов. Этот анализ должен опираться на информацию, предоставленную разработчиками о функциональных возможностях каждого из этих пакетов. Оценка должна включать в себя способность каждого пакета моделировать различные процессы и учитывать их влияние на решение конкретных задач. Важной характеристикой всех этих пакетов является их способность проводить тепловой анализ.

Примером таких программных пакетов является ANSYS Multiphysics – многоцелевой конечно-элементный пакет, предназначенный для анализа широкого спектра дисциплин. Программа ANSYS включает в себя полноценный препроцессор для создания, импорта и редактирования геометрических и сеточных моделей, постановки задач, решения и визуализации результатов. Программа также обладает встроенным языком программирования APDL, который позволяет пользователю создавать процедуры, параметризовать модели, проводить расчеты и выводить результаты. ANSYS позволяет использовать пользовательские модели, написанные на FORTRAN и C++.

Таблица 1.1 – обзор основных программ и программных комплектов, для решения инженерных задач

Программные пакеты / Возможности	Статистический анализ	Динамический анализ	Частотный анализ	Тепловой анализ	Расчет упругости	Расчеты на прочность	Расчеты на жесткость	Анализ напряженно-деформированного
T-Flex	+		+	+	+	+	+	
Comsol	+	+		+	+	+		+
APM	+				+	+	+	+
Ansys	+	+		+	+	+	+	+
MSCNastran	+	+	+	+	+	+		+
Abaqus	+	+	+	+		+		
NEiNastran		+	+	+	+	+		
NXNastran	+	+	+	+	+	+		+
Samcef	+	+	+	+	+	+	+	
Fluent				+		+		
OpenFOAM				+		+		
Star_CD				+		+		
CFX				+		+		

ANSYS также предоставляет возможность моделирования различных электромагнитных задач с использованием нескольких типов конечных

элементов для разнообразных приложений в электростатике, магнитостатике и постоянных токах.

Программный комплекс ANSYS CFX. Этот пакет программного обеспечения объединяет возможности для анализа гидрогазодинамических процессов, многофазных потоков, химической кинетики, горения, радиационного теплообмена и многих других аспектов [92]. Важной особенностью является способность работать в рамках единой среды Workbench, что обеспечивает удобный обмен данными и результатами с другими модулями ANSYS, что, в свою очередь, позволяет проводить совмещенный анализ жидкостных и структурных характеристик. Этот пакет предоставляет широкий набор физических моделей, обеспечивая точное решение разнообразных промышленных задач.

Пакет CFX активно используется для моделирования и анализа процессов, протекающих в турбомашинах. Один из самых мощных модулей включает CFX-TASCflow, который начал использоваться инженерами в области турбиностроения с 1985 года. Данный модуль был разработан в ходе проекта НАСА, целью которого было моделирование топливных турбонасосов и компрессоров ракетных двигателей, используемых на космическом шаттле Спейс-Шаттл.

Пакет CFX включает в себя различные структурные элементы, такие как препроцессор, ядро для расчетов скоростей и температур, программы для расчета радиационного теплообмена, постпроцессор, а также дополнительные модули для проектирования лопаток, учета множественных систем отсчета, моделирования горения и химических реакций, многофазных течений и параллельных вычислений.

Препроцессор этого пакета, основанный на системе PATRAN, позволяет легко создавать геометрические модели и импортировать геометрическую информацию из других систем САПР. Это удобное средство позволяет инженерам создавать сложные трехмерные геометрические модели, такие как лопатки турбины, с использованием различных поверхностей и криволинейных ребер. Для численного решения задач используются конечно-объемный или конечно-элементный подходы, а решение уравнений Навье-Стокса осуществляется с использованием метода SIMPLE и его модификаций, обеспечивая расчеты для скоростей и давления.

STAR-CD STAR-CD - это многоцелевой пакет вычислительной гидродинамики (CFD) разработанный CD-adapco group, который включает в себя инновационный метод "подвижных сеток" [93]. Эффективное распараллеливание алгоритма, построенного на основе метода конечных объемов, вместе с автоматическими способами декомпозиции области течения, делает возможным моделирование задач любой степени сложности. STAR-CD был впервые применен в автомобильной промышленности и затем успешно нашел свое применение в различных отраслях. Для обеспечения качества программы важно сотрудничество с промышленными компаниями, инжиниринговыми фирмами и научными исследовательскими центрами.

Области применения STAR-CD включают в себя такие области как транспорт, отрасли аэрокосмической промышленности, автомобилестроение и железнодорожный транспорт, сектор судостроения, изучение аэродинамических процессов, системы регулирования климата, охлаждающие системы для двигателей, применение катализаторов, процессы горения в двигателях внутреннего сгорания, разработка газотурбинных и ракетных двигателей, конструкция турбин, гидродинамика в судоходстве и многое другое.

Программный комплекс STAR-CD включает в себя решатель STAR, а также пре- и постпроцессоры, такие как ProSTAR и ProAM, а также компилятор языка FORTRAN. UNIX-версии STAR-CD требуют компилятор, поставляемый с конкретной версией UNIX.

Версии для Windows и LINUX включают в себя компилятор Absoft Pro FORTRAN. ProAM является продвинутой версией ProSTAR, обеспечивающей возможность автоматизированного построения сеток в сложных трехмерных пространствах, в отличие от ProSTAR, который ограничивается методами блочного построения и экструзии сеток. К ProAM также добавлен широкий спектр специализированных модулей, включая ESTurbo для турбомашин, ESAero для автомобильной аэродинамики, ESUhood для анализа теплообмена в моторных отсеках, и Mixpert для разработки смесителей и реакторов

STAR-CD предлагает пользователям возможности для анализа динамики жидкостей и газов для всех видов сеток, предоставляя решения для стационарных и переменных во времени потоков: ламинарных потоков, включая модели для ньютоновских и неньютоновских жидкостей турбулентных потоков сжимаемых и несжимаемых течений, в том числе при около- и сверхзвуковых условиях теплообмена через конвекцию, излучение и проводимость, с учетом твердых материалов массообмена, химических реакций, горения в газовом, жидком и твердом состоянии, потоков с распределенным сопротивлением, многокомпонентных потоков, многофазных потоков по модели Лагранжа и Эйлера, потоков с свободными поверхностями.

Программный комплекс FlowVision FlowVision способен решать трехмерные задачи динамики жидкостей и газов, включая сохранение массы и импульса, а также уравнения состояния. Платформа адаптирована для анализа сложных потоков жидкости и газа с учетом дополнительных физических процессов, таких как турбулентность, процессы горения и взаимодействие на границах различных сред. Использование специализированных уравнений позволяет точно моделировать эти явления.

Применение FlowVision охватывает множество сфер, от аэрогидродинамики объектов, таких как автомобили, корабли и самолеты, до внутренней аэрогидродинамики, включая системы вентиляции и трубопроводы. Платформа также используется в разработке и анализе турбомашин, изучении процессов горения, в технологических процессах, включая теплообмен и смешение газов, в производственных процессах, таких как металлургия, в

экологии для изучения распространения загрязнений, а также в системах контроля микроклимата.

FlowVision продолжает развиваться, внося вклад в разнообразие применений благодаря активному участию сообщества пользователей. Платформа построена на современных технологиях, включая прямоугольные сетки с возможностью детализации, точную аппроксимацию границ, интеграцию с САПР и конечно-элементными системами, ядро на C++, объектно-ориентированный подход и удобный пользовательский интерфейс для Windows.

FLOW-3D – Этот CFD-пакет общего назначения, известный как FLOW-3D, предоставляет возможность моделировать широкий спектр задач, связанных с течением газа или жидкости [94]. Несмотря на то что FLOW-3D особенно эффективен для симуляции потоков с свободными поверхностями, его также можно использовать для анализа замкнутых и внутренних потоков.

FLOW-3D использует метод конечных объемов и включает уникальный метод FAVOR, который не имеет аналогов в других CFD-пакетах. Этот метод прост в использовании и обеспечивает высокую точность моделирования.

Программа FLOW-3D широко используется в коммерческих и научных проектах по всему миру для решения сложных задач в разных областях. Этот инструмент является самодостаточным и не нуждается в дополнениях из внешних программ. Его пользовательский графический интерфейс охватывает все этапы работы: от формулировки задачи и предварительной обработки до выполнения расчетов и анализа результатов, предоставляя при этом полезные функции, включая возможность просмотра STL-файлов и инструменты для мониторинга процесса вычислений.

FLOW-3D обладает несколькими важными особенностями. Во-первых, для создания сетки он использует подход, который сочетает преимущества простой прямоугольной сетки с гибкостью деформируемых сеток, что позволяет изменять сетку и геометрию независимо друг от друга. Во-вторых, FLOW-3D использует метод FAVOR для описания сложных геометрических форм на прямоугольной сетке. И, в-третьих, программа обеспечивает точную обработку поверхности текущей жидкости, используя метод Volume of Fluid (VOF) с улучшенной реализацией, названной TruVOF.

COMSOL Multiphysics – Этот программный комплекс создан для моделирования и анализа научных и инженерных задач, основанных на уравнениях с частными производными, применяя метод конечных элементов. Он позволяет расширять базовые модели, включая как отдельные дифференциальные уравнения, так и комплексные мультифизические модели для изучения взаимодействия различных физических процессов. Пользователи могут взаимодействовать с программой через графический интерфейс или с помощью программирования на языке COMSOL Script или MATLAB.

Программа предлагает три подхода к определению систем дифференциальных уравнений с частными производными:

1. Коэффициентная форма для моделей, близких к линейным;

2. Генеральная форма для решения нелинейных задач ;
3. Слабая форма для специфических случаев, таких как уравнения на границах и ребрах или модели с смешанными и временными производными.

Используя эти методы, программа позволяет выполнять разнообразные анализы: стационарные и динамические, линейные и нелинейные, а также исследовать модальные характеристики и собственные частоты

COMSOL Multiphysics реализует конечно-элементный анализ, адаптируя сетку под геометрию анализируемого объекта и обеспечивая точность результатов. Это дает возможность моделировать широкий спектр явлений в различных областях, включая акустику, химические процессы, электромагнетизм, гидродинамику, тепло- и массообмен, оптику, полупроводниковые технологии.

T-FLEX – Группа T-FLEX "расчётные системы" включает в себя следующие компоненты: T-FLEX Анализ, T-FLEX Динамика, T-FLEX Расчёты и T-FLEX Пружины [96].

T-FLEX Анализ представляет собой универсальную систему для проведения конечно-элементного анализа, обладающую встроенным пре-/постпроцессором и следующими расчётными модулями:

1. Статический анализ - предназначен для оценки напряжённого состояния конструкций, подвергаемых действию постоянных во времени сил. Этот модуль позволяет оценивать прочность разработанных конструкций на основе допустимых напряжений, выявлять слабые места и вносить необходимые изменения в изделие.

2. Частотный анализ - проводит расчёт собственных частот конструкции и форм колебаний. Этот анализ способствует повышению надёжности и работоспособности изделия.

3. Анализ устойчивости - предназначен для проектирования конструкций, которые подвергаются длительному воздействию различных по интенсивности нагрузок.

4. Тепловой анализ - обеспечивает возможность оценки поведения изделия в условиях воздействия тепловых источников и излучения.

Эти модули сделают анализ и проектирование более точными и эффективными, позволяя инженерам более детально изучать различные аспекты конструкции.

Выводы по первому разделу

В первом разделе был проведен анализ научных работ, посвященных методам и алгоритмам моделирования теплофизических процессов в стержнях. Исследования показали, что существует множество подходов к решению данного класса задач, однако вариационный метод, который представляет собой альтернативный подход к решению задач теплопроводности, в настоящее время не получает достаточного внимания в исследовательском сообществе. Вариационный метод основанный на принципе минимизации функционала, который описывает физическую систему, может предложить ряд преимуществ, включая лучшее понимание общей физики процесса и способность обеспечивать более общие решения.

Сравнительный анализ существующих пакетов прикладных программ для моделирования задач термодинамики показал наиболее распространенные численные методы, которые лежат в основе программного обеспечения для ряда прикладных пакетов, предназначенных для моделирования сложных задач в области теплового анализа. Становится ясно, что для достижения высокой эффективности в моделировании крайне важно применение численных методов. Среди них особо выделяется вариационный метод, который является ключевым при решении задач, связанных с тепломассопереносом.

2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ

2.1 Постановка задачи в евклидовом пространстве

Рассматривается цилиндрический стержень длиной L и радиусом R . При этом левый конец стержня совпадает с началом координат и коэффициент теплообмена считается постоянным по всей поверхности стержня. Также предполагается, что стержень находится под воздействием точечной температуры и поверхностного теплообмена.

Исследуется горизонтальный стержень длиной L и радиуса R . Построим глобальную декартовую систему координат $Oxyz$ (Рисунок 2.1).

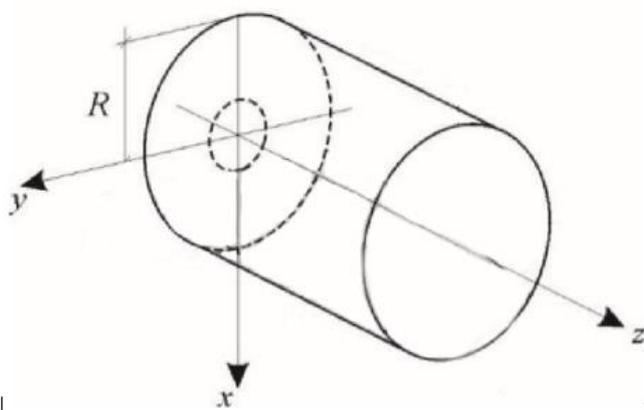


Рисунок 2.1- Общий вид цилиндрического стержня

Распространение тепла в стержне описывается следующим трехмерным уравнением теплопроводности

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q, \quad (2.1)$$

где

k – коэффициент теплопроводности;

ρ – плотность;

c – удельная теплоемкость;

h – коэффициент теплообмена;

$q(x, y, z, t)$ – интенсивность источников тепла в точке (x, y, z) в момент времени t .

T_{oc} – температура окружающей среды;

S_{nc} – площадь поперечного сечения стержня;

x, y, z – пространственные переменные $0 \leq x, y \leq R, 0 \leq z \leq L$;

R – радиус стержня;

L – длина стержня.

Уравнение в частных производных (2.1) представляет собой дифференциальное уравнение, описывающее сохранение энергии в изохорном процессе переноса теплоты или в нестационарном случае теплопроводности. Оно определяет связь между изменением температуры во времени и пространстве в любой точке твердого тела, где происходит процесс теплопроводности.

Предполагается, что левый конец стержня совпадает с началом координат и коэффициент теплообмена считается постоянным по всей поверхности стержня. Также предполагается, что стержень находится под воздействием точечной температуры и поверхностного теплообмена.

Дифференциальное уравнение теплопроводности, вместе с начальными и граничными условиями, полностью определяет задачу. Это означает, что зная геометрическую форму тела, начальные и граничные условия, мы можем решить дифференциальное уравнение полностью и, следовательно, найти поле температур в теле, обозначаемое как $T(x,y,z,t)$ – функция распределения температуры в любой момент времени t .

Функция $T(x,y,z,t)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению (2.1), а также начальным и граничным условиям.

Для получения единственного решения уравнения теплопроводности необходимо включить начальные и граничные условия. Начальные условия требуются при изучении нестационарных процессов и определяют распределение температуры внутри тела в начальный момент времени. В общем случае, начальное условие можно выразить следующим образом:

$$T|_{t=0} = const, \quad (2.2)$$

где $M = (x, y, z) \in D$,

t – время ($t_0 \leq t \leq t_1$),

$t_1 - t_0$ – промежуток времени, в течение которого изучается процесс теплопроводности стержня.

Обозначим через D – параллелепипед ($-R \leq x, y \leq R, 0 \leq z \leq L$), а через Γ – границу D , $Q = \{x, y, z, t | (x, y, z) \in D, t \in [t_0, t_1]\}$.

Граничные условия зададим в виде

$$\frac{\partial T}{\partial n} |_{\Gamma} = 0. \quad (2.3)$$

$$T(0, y_{ц}, z_{ц}, t) = const. \text{ Z-заменить на x на рисунке 2.1}$$

2.2 Решение уравнения теплопроводности в цилиндрической системе координат

В данной работе рассматривается горизонтальный цилиндрический стержень радиуса R и длиной L . Боковая поверхность стержня нетеплоизолирована. На площадь поперечного сечения левого конца подводится тепловой поток интенсивностью $q[\frac{Вт}{см^2}]$. При этом температура окружающей среды $T_{oc}[^{\circ}C]$.

При замене координат

$$x = r * \sin(\varphi), y = r * \cos(\varphi) \quad (2.4)$$

система уравнений теплопроводности (2.1) примет следующий вид в цилиндрической системе координат

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{q(r,z,\varphi,t)}{c\rho} \quad (2.5)$$

В силу симметрии поле температур не зависит от φ . Поэтому перепишем уравнение (2.3) в следующем виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{q(r,z,t)}{c\rho} \quad (2.6)$$

Обозначим через D_r – параллелепипед $(-R \leq r \leq R, 0 \leq z \leq L)$, а через Γ_r – границу D_r , $Q_r = \{r, z, t | (r, z) \in D_r, t \in [t_0, t_1]\}$.

Граничные условия зададим в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial n} |_{\Gamma_r} &= 0. \\ T(0, z_u, t) &= const. \end{aligned} \quad (2.7)$$

В курсе математической физики демонстрируется принцип максимума и формулируется теорема о единственности решения. Из этой теоремы следует, что если функция $T(r,z,t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению теплопроводности, начальным и граничным условиям, то она является единственным решением данной задачи.

Теорема 1 (принцип максимума). Если функция $T(r, z, t)$ определенная и непрерывная в замкнутой области Q_r удовлетворяет уравнению (2.1), то она достигает максимального и минимального значения в начальный момент времени или на границе Γ_r .

Теорема 2 (единственности). Если две функции T_1 и T_2 , определенные и непрерывные в области Q_r , удовлетворяют уравнению (2.1) и одинаковым начальным и граничным условиям (2.3)-(2.4), то $T_1(r, z, t) \equiv T_2(r, z, t)$.

В этой связи предлагается решение поставленной задачи разбить на несколько подзадач.

Задача 1. Численное решение уравнения теплопроводности в цилиндрической системе координат.

Для численного решения задачи (2.6)-(2.7) применяется разностный метод, разработана явная разностная схема 2.8, область D покрыта равномерной сеткой с шагами Δr и Δz по осям r и z соответственно:

$$T\rho_{i,j}^{n+1} = T\rho_{i,j}^n + \Delta tk \left(\frac{T\rho_{i+1,j}^n - 2T\rho_{i,j}^n + T\rho_{i-1,j}^n}{\Delta r^2} + \frac{T\rho_{i,j}^n - T\rho_{i-1,j}^n}{2r\Delta r} + \frac{T\rho_{i,j}^n - 2T\rho_{i,j}^n + T\rho_{i,j}^n}{\Delta z^2} + \right) + \frac{1}{c\rho} q\rho_{i,j}^n, \quad (2.8)$$

Здесь Δt – шаг по времени, индекс n – по времени, Δr –шаг по радиусу, Δz –шаг вдоль оси Oz , индексы i, j – по координатам r и z соответственно. В выражении (2.8) все слагаемые записываются для n -го временного шага и лишь одно – для $(n+1)$ -го.

Предлагается следующий итерационный алгоритм решения (Алгоритм А):

$$1. t = t_0, n = 0. T_{i,j}^0 = 0 \text{ для всех внутренних точек в области } D_r, \\ T^0|_{\Gamma_r} = const, \quad (2.9)$$

для всех точек на границе Γ_r .

2. По формуле (2.8) вычисляем значения $T_{i,j}^{n+1}$ во внутренних точках области D_r .

3. Если критерий $t < t_1$ выполняется, то $t = t + \Delta t, n = n + 1$, переход на шаг 2, иначе итерационный процесс завершен .

При выполнении расчетов необходимо провести исследование устойчивости явной разностной схемы (2.8), а именно проверить условие.

$$\Delta t \leq \frac{1}{2k^2} \left(\frac{1}{\Delta r^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right) . \quad (2.10)$$

Разработана программа нахождения распространения температуры по цилиндрическому стержню, которая помещает результаты численных расчетов в несколько файлов. Результаты численных расчетов в динамике (по времени) отображаются в виде одномерных графиков. Расчеты проведены при следующих исходных данных:

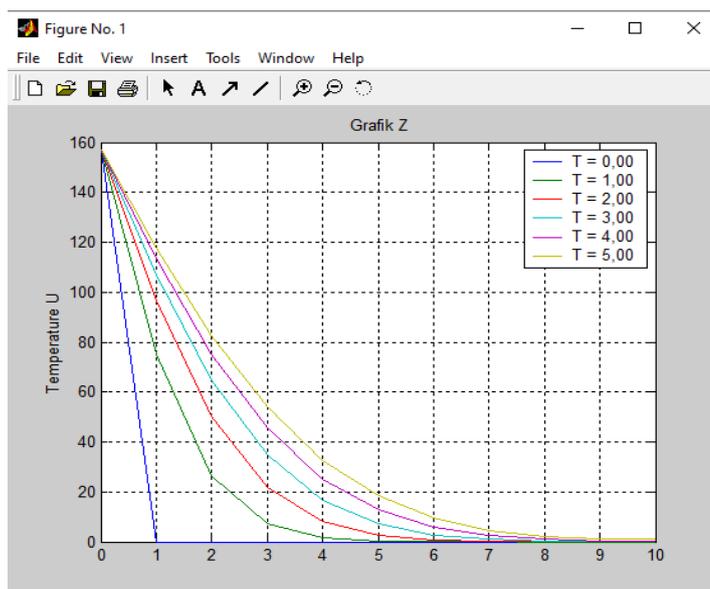
$$L = 1.0; R = 10.0; \Delta t = 0.01;$$

$$nr = 10; nz = 6;$$

$$\Delta r = R/nr, \Delta z = L/nz;$$

$$q = 200; \rho = 7.870; c = 0.13; k = 0.177;$$

Из-за сложности интерпретации полученных численных расчетов и повышения наглядности разработана программа на MatLab. На рисунках 2.2–2.3 представлены в графическом виде результаты численных расчетов. На рисунке 2.2 показан график распределения температуры в динамике за время $T=5$ по центру стержня в направлении оси Z от начала координат.



7

Рисунок 2.2-График распределения температуры по центру стержня в направлении оси Z от начала координат за время $T=5$

На рисунке 2.3 представлен график распространения температуры за время $T=50$ по центру стержня в направлении оси Z от начала координат в динамике.

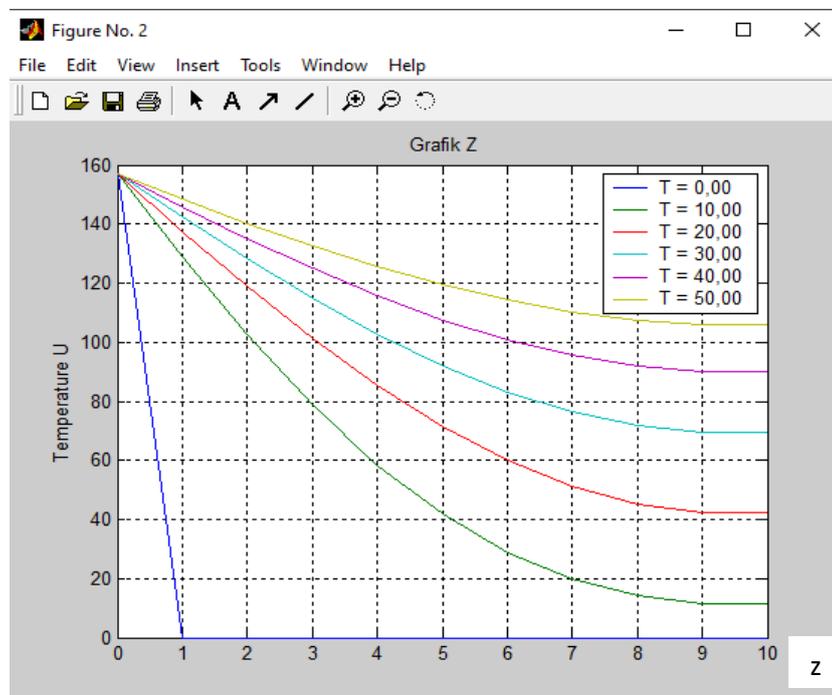


Рисунок 2.3 - График распространения температуры по центру стержня в направлении Z от начала координат за время $T=50$

В результате работы алгоритма А в матрице $T\rho_{i,j}^n$ размещается численное решение уравнения теплопроводности в цилиндрической системе координат.

2.3 Решение уравнения теплопроводности в евклидовой системе координат

Задача 2. Решение уравнения теплопроводности в декартовой системе координат на нерегулярной сетке.

Предлагается следующий итерационный алгоритм решения (Алгоритм В):

1. $t = t_0, n = 0$.
2. По формуле (2.4) вычисляем значения Tx_k^n, Ty_k^n и $Txyz_k^n$ для всех φ_i^n и r_j^n . Здесь
$$i = \overline{1, n_\varphi}, j = \overline{1, n_r}, k = \overline{1, n_\varphi * n_r}$$
3. Если критерий $t < t_1$ выполняется, то $t = t + \Delta t, n = n + 1$, переход на шаг 2, иначе итерационный процесс завершен.

Задача 3. Решение уравнения теплопроводности в декартовой системе координат на регулярной сетке.

Предлагается следующий итерационный алгоритм решения (Алгоритм С):

1. $t = t_0, n = 0$.
2. Для всех $i = \overline{1, n_x}$ вычисляем координату x_t
3. Для всех $j = \overline{1, n_y}$ вычисляем координату y_t
4. Для точки (x_t, y_t) находим ближайшую точку из массивов Tx_k^n, Ty_k^n , т.е. решаем следующую задачу
$$\min(\sqrt{(Tx_k^n - x_t)^2 + (Ty_k^n - y_t)^2}).$$
 Значение температуры в точке минимума присваиваем элементу матрицы $T_{i,j}^n$.
5. Если критерий $t < t_1$ выполняется, то $t = t + \Delta t, n = n + 1$, переход на шаг 2, иначе итерационный процесс завершен.

Выводы по второму разделу

Для решения уравнения теплопроводности цилиндрического стержня, то есть для нахождения значений $T(x, y, z, t)$ – функции распределения температуры в любой момент времени t :

1. Численно решено уравнения теплопроводности в цилиндрической системе координат с применением разностного метода, т.е. уравнение теплопроводности аппроксимируется разностной схемой.

2. Решено уравнение теплопроводности в декартовой системе координат на нерегулярной сетке.

3. Решено уравнение теплопроводности в декартовой системе координат на регулярной сетке.

Разработана программа нахождения распространения температуры по цилиндрическому стержню, которая помещает результаты численных расчетов в несколько файлов.

3. РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ ДЛЯ ОЦЕНКИ И МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СТЕРЖНЯХ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

3.1 Формулировка задач теплофизического состояния стержня переменного сечения

Представлен горизонтальный стержень с переменным поперечным сечением и ограниченной длиной L , где площадь сечения на левом конце больше, чем на правом. Боковая поверхность стержня полностью неизолирована от тепла, как показано на рисунке 3.1. Тепловой поток $q[\frac{Вт}{см^2}]$ подается к поперечному сечению на левом конце стержня. В то же время, теплообмен происходит через поперечное сечение правого конца стержня с окружающей его средой, где установлен коэффициент теплоотдачи, а температура внешней среды обозначена как $T_{oc}[°C]$. Схема для расчетов по этой задаче представлена на рисунке 3.1.

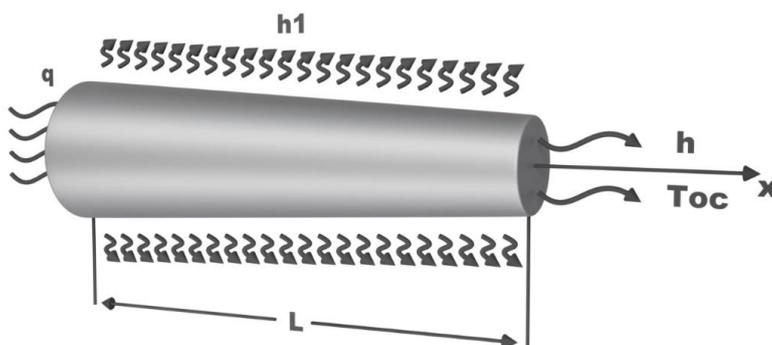


Рисунок 3.1 - Схема нетеплоизолированного стержня

Радиус сечения исследуемого стержня меняется линейно, следующим образом, т.е. $r=ax+b$, $0 \leq x \leq l$, а a и b заданные константы.

Термические и механические характеристики материала, из которого сделан изучаемый стержень, определяются через такие параметры, как коэффициенты теплопроводности и теплового линейного расширения материала, а также его модуль упругости. Здесь коэффициент теплопроводности обозначается как $k[\frac{Вт}{см \cdot °C}]$, коэффициент теплового расширения как $\alpha[\frac{1}{°C}]$, а модуль упругости как $E[\frac{кГ}{см^2}]$. Уравнение теплопроводности для стержня, у которого теплообмен происходит через боковую поверхность, формулируется следующим образом при учете граничных условий (3.4):

$$k \frac{d^2T}{dx^2} + k \frac{dT}{dx} \left(\frac{1}{F(x)} \frac{dF(x)}{dx} \right) - h_0 P(x) \frac{(T - T_{oc})}{F(x)} = 0, \quad F(x) = \pi r^2, \quad (3.1)$$

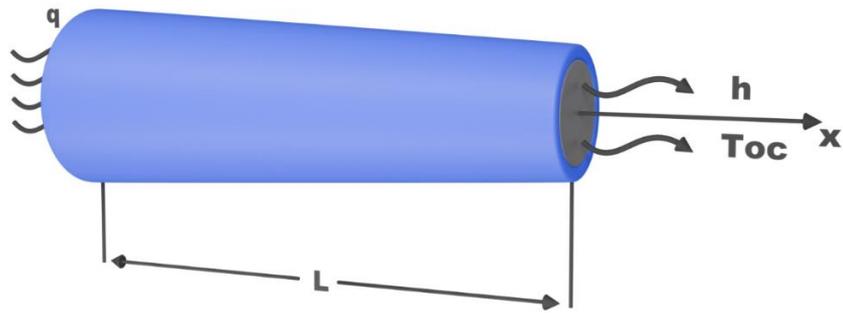


Рисунок 3.2 – Схема теплоизолированного стержня

Уравнение теплопроводности для теплоизолированного по боковой поверхности стержня (рисунок – 3.2), имеет вид (3.2) при граничных условиях (3.4):

$$k \frac{d^2 T}{dx^2} + k \frac{dT}{dx} \left(\frac{1}{F(x)} \frac{dF(x)}{dx} \right) = 0. \quad (3.2)$$

Уравнение, когда подается тепловой поток сбоку стержня

$$k \frac{d^2 T}{dx^2} + k \frac{dT}{dx} \left(\frac{1}{F(x)} \frac{dF(x)}{dx} \right) - \frac{qP(x)}{F(x)} = 0. \quad (3.3)$$

При следующих граничных условиях:

$$k \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} - q \Big|_{x=0} = 0, \quad k \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} + h(T - T_{oc}) \Big|_{x=L} = 0. \quad (3.4)$$

Требуется выяснить распределение температуры вдоль исследуемого стержня, а также определить его удлинение, осевую нагрузку, деформацию, напряжение и перемещение.

3.2 Вариационный подход для построения функционала для стержня переменного сечения и метод решения задачи

3.2.1 Основы вариационного метода

Основная задача вариационного метода заключается в следующем. Пусть имеется функционал:

$$J = \int_a^b F\left(x, T(x), \frac{dT(x)}{dx}\right) dx. \quad (3.5)$$

Необходимо найти функцию $T(x)$, которая минимизирует функционал J .

Эйлером было доказано, что для нахождения этой функции необходимо, чтобы вариация функционала должна быть равна 0.

Найдем вариацию функционала J :

$$\delta J = \int_a^b \delta F\left(x, T(x), \frac{dT(x)}{dx}\right) dx = \int_a^b \left(\frac{dF}{dT} \delta T + \frac{dF}{dT'_x} \delta T'_x \right) dx. \quad (3.6)$$

Интегрируя второй член по частям, имеем

$$\delta J = \int_a^b \left[\frac{dF}{dT} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dF}{dT'_x} \right) \right] \delta T dx + \frac{dF}{dT'_x} \delta T \Big|_a^b = 0. \quad (3.7)$$

Исходя из этого условия получаем следующие условия минимума

$$\frac{dF}{dT} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dF}{dT'_x} \right) = 0, \quad (3.8)$$

$$\frac{dF}{dT'_x} \Big|_a = 0, \quad \frac{dF}{dT'_x} \Big|_b = 0. \quad (3.9)$$

3.2.2 Вариационный метод для теплопроводности

Общая постановка вариационного метода для решения нестационарной задачи теплопроводности рассмотрена, где рассматривается функционал:

$$J = \int_V \frac{1}{2} \left[k \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 + k \left(\frac{dT}{dy} \right)^2 + k \left(\frac{dT}{dz} \right)^2 - 2 \left(Q - \lambda \frac{dT}{dt} \right) T \right] dV + \int_S q T dS + \int_S \frac{h}{2} (T - T_\infty)^2 dS, \quad (3.10)$$

где $-\frac{1}{2} \left[k \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 + k \left(\frac{dT}{dy} \right)^2 + k \left(\frac{dT}{dz} \right)^2 \right]$ – член, указывающий на внутреннюю энергию стержня;

$-\int_V QTdV$ – член, который указывает на внутренние источники тепла;

$\int_V \lambda \frac{dT}{dt} TdV$ – член, показывающий нестационарность процесса;

$\int_S qTdS$ – член, связанный с количеством теплового потока, поступающего

в стержень;

$\int_S \frac{1}{2} h(T - T_{oc})^2 dS$ – член, отвечающий за теплообмен с окружающей средой

через поверхность стержня.

Покажем, что из вариационного подхода можно получить уравнение теплопроводности с соответствующим граничными условиями.

Для простоты рассмотрим стационарную задачи для нетеплоизолированного стержня ограниченной длины L , с левого торца которого подается постоянный поток тепла, а на правом – происходит теплообмен с окружающей средой. Кроме того, предполагаем, что имеется некоторая функция распределения внутренней энергии по длине стержня.

Для этого случая функционал J имеет вид:

$$J = \int_0^L \left[\frac{sk}{2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 - sQT + s\lambda \frac{dT}{dt} T + \frac{s}{r} h_1 (T - T_{\bar{o}})^2 + qTs + \frac{s}{2} h (T - T_{oc})^2 \right] dx, \quad (3.11)$$

где T_{oc} и $T_{\bar{o}}$ – температура окружающей среды с правого торца и с боковой поверхности стержня;

$\int_0^L \frac{s}{r} h_1 (T - T_{\bar{o}})^2 dx$, член отвечающий за теплообмен через боковую

поверхность стержня;

$\int_0^L qTs dx$, член отвечающий за тепловой поток, поступающий через левый

торец стержня;

$\int_0^L \frac{s}{2} h (T - T_{oc})^2 dx$, член отвечающий за теплообмен через правый торец

стержня.

Подынтегральная функция уравнения (3.11) имеет вид:

$$F \left(x, T, \frac{dT}{dx} \right) = s \frac{k}{2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 - sQT + \frac{s}{2r} h_1 (T - T_{\bar{o}})^2 + s\lambda \frac{dT}{dt} T + qTs + \frac{s}{2} h (T - T_{oc})^2.$$

Дадим малое приращение функции $\hat{T} = T + \varepsilon \eta(x)$. Тогда функционал имеет вид:

$$J = \int_0^L \left[\frac{sk}{2} \left(\frac{d(T + \varepsilon \eta(x))}{dx} \varepsilon \eta'(x) \right)^2 - sQ(T + \varepsilon \eta(x)) + \frac{s}{r} h_1 (T + \varepsilon \eta(x) - T_{\bar{o}})^2 \right] dx + \\ + \int_0^L \left[+s\lambda \frac{d(T + \varepsilon \eta(x))}{dt} (T + \varepsilon \eta(x)) + q(T + \varepsilon \eta(x))s + \frac{s}{2} h (T + \varepsilon \eta(x) - T_{oc})^2 \right] dx$$

Берем производную по ε :

$$\frac{dJ}{d\varepsilon} = \int_0^L \left[sk \frac{dT}{dx} \eta'(x) - sQ\eta(x) + 2\frac{s}{r} h_1 (T - T_\sigma) \eta(x) + s\lambda \frac{dT}{dt} \eta(x) \right] dx + \\ + \int_0^L [q\eta(x)s + sh(T - T_{oc})\eta(x)] dx,$$

или

$$\frac{dJ}{d\varepsilon} = \int_0^L \left\{ sk \frac{dT}{dx} \eta'(x) + \left[-sQ + 2\frac{s}{r} h_1 (T - T_\sigma) + s\lambda \frac{dT}{dt} + qs + sh(T - T_\infty) \right] \eta(x) \right\} dx. \quad (3.12)$$

Первый член интегрируем по частям

$$\int_0^L \left[sk \frac{dT}{dx} \eta'(x) \right] dx = sk \frac{dT}{dx} \eta(x) \Big|_0^L - \int_0^L \left[sk \frac{d^2T}{dx^2} \eta(x) \right] dx.$$

Подставляя это в (3.12) имеем

$$\frac{dJ}{d\varepsilon} = sk \frac{dT}{dx} \eta(x) \Big|_0^L + \int_0^L \left[-sk \frac{d^2T}{dx^2} - sQ + 2\pi r h_1 (T - T_\sigma) + s\lambda \frac{dT}{dt} \right] \eta(x) dx + qs \Big|_0 + sh(T - T_{oc}) \Big|_0^L = 0. \quad (3.13)$$

Из условия (3.13) имеем

$$sk \frac{d^2T}{dx^2} + \lambda s \frac{dT}{dt} - sQ - 2\pi r h_1 (T - T_\sigma) = 0, \quad (3.14)$$

и

$$-k \frac{dT}{dx} \Big|_0 + q = 0,$$

(3.15)

$$k \frac{dT}{dx} \Big|_L + h(T - T_{oc}) \Big|_L = 0.$$

(3.16)

Таким образом, мы вывели уравнение теплопроводности с учетом теплового потока с левой стороны и теплообмена с правой стороны стержня. При условии поддержания температуры T_1 на левом конце, первое ограничение формулируется как:

$$-k \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = 0.$$

Откуда

$$T(0) = T_1.$$

(3.17)

Таким образом, можно утверждать, что нахождение вариации функционала J эквивалентно решению задачи теплопроводности. Это означает, что мы можем разбить стержень на элементы, для каждого из них выбрать аппроксимирующие функции T с неизвестными параметрами, подставить в функционал (3.11) и минимизируя его найти искомую функцию T . Заметим, что при этом граничные условия учитываются автоматически.

Исходя из вышеизложенного в работе стержень разбиваем на m элементов, и для каждого i -го элемента вычисляется функционал:

$$J = \int_0^l \left[\frac{sk}{2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 - sQT + \pi r h_1 (T - T_\sigma)^2 + s\lambda \frac{dT}{dt} T + qTs + \frac{sh}{2} (T_1 - T_\infty)^2 \right] dx,$$

где $l=L/m$.

Для стационарного случая член $s\lambda \frac{dT}{dt}T$ отсутствует.

Исходя из вида функционала (3.11) и уравнения теплопроводности (3.14) и можно получить следующие соотношения:

- если в дифференциальном уравнение стоит вторая производная, то она равна интегралу квадрата первой производной, деленная на два, например, $\frac{d^2T}{dx^2}$

превращается в $\int_0^l \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 \right] dx$;

- если в дифференциальном уравнение стоит некоторая функция, то она равна интегралу умноженная на T , например, $Q(t)$ в (3.14) в функционале превращается в $\int_0^l Q(t)T dx$;

- если с левого конца стержня подается тепловой поток q , то в функционал добавляется член:

$$\int_0^L qT dx;$$

- член, который указывает на теплообмен в правом конце стержня:

$$\int_0^L \frac{h}{2} (T - T_{oc})^2 dx;$$

Вариационный подход к задаче о тепловом состоянии анализируемого стержня, описываемом уравнениями (3.1) и (3.2) при соблюдении граничных условий (3.4), позволяет заменить его на функционал общей тепловой энергии (3.18), учитывая присутствие тепловых потоков, теплоизоляции и обмена теплом. Для данной задачи можно разработать функционал, который отражает полную тепловую энергию, и он будет представлен следующим образом:

$$J = \int_{S(x=0)} qT ds + \int_V \frac{k}{2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 dv + \int_{S(x=l)} \frac{h}{2} (T - T_{oc})^2 ds + \int_{S_0} \frac{h}{2} (T - T_{oc})^2 ds. \quad (3.18)$$

Важно подчеркнуть, что единицы измерения каждого элемента функционала будут в $[Вт \cdot ^\circ C]$. Функционал (3.18) представляет собой аналог принципа сохранения энергии для анализируемого стержня, принимая во внимание одновременное присутствие тепловых потоков, теплоизоляционных материалов и процессов теплообмена. Первый элемент функционала интегрируется по области поперечного сечения на левом конце стержня, к которому подается тепловой поток q . Второй элемент охватывает интеграцию по объему стержня с переменным поперечным сечением. Третий элемент описывает интеграцию по площади поперечного сечения на правом конце стержня, где осуществляется теплообмен с внешней средой. Четвертый член учитывает подведение теплового потока сбоку стержня.

Согласно методу конечных элементов, стержень разбивается на m элементов.

Для каждого узла i температуру аппроксимируем квадратичной функцией [67].

$$T_i(x) = \varphi_i(x)T_i + \varphi_{i+1}(x)T_{i+1} + \varphi_{i+2}(x)T_{i+2}, \quad x_i \leq x \leq x_{i+2} \quad (3.19)$$

$$\text{где } \varphi_i(x) = \frac{2x^2 - 3lx + l^2}{l^2}; \quad \varphi_{i+1}(x) = \frac{4lx - 4x^2}{l^2}; \quad \varphi_{i+2}(x) = \frac{2x^2 - lx}{l^2}; \quad (3.20)$$

Здесь для j го элемента $i=2j+1$.

Градиент температуры находится формулой:

$$\frac{dT_i(x)}{dx} = \frac{d\varphi_i}{dx}T_i + \frac{d\varphi_{i+1}}{dx}T_{i+1} + \frac{d\varphi_{i+2}}{dx}T_{i+2} = \frac{4x-3l}{l^2}T_i + \frac{4l-8x}{l^2}T_{i+1} + \frac{4x-l}{l^2}T_{i+2}. \quad (3.21)$$

Тогда функционал (3.18) для задачи (3.1) и (3.2) при ограничениях (3.4) при разбиении на m элементов имеет вид:

$$J = qT_1S(x_1) + \sum_{i=1}^{n-2} \int_{x_i}^{x_{i+2}} \frac{k}{2} \left(\frac{dT_i(x)}{dx} \right)^2 dx + \frac{hS(x_n)}{2} (T_n - T_{oc})^2.$$

Здесь при квадратичной аппроксимации $n=2m+1$.

Минимизируя функционал по узловым точкам температуры получим систему линейных уравнений:

$$\frac{dJ}{dT_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.22)$$

По итогам анализа (3.22) были получены следующие теоретические результаты.

Утверждение 1. Система линейных алгебраических уравнений (3.23) для теплоизолированного стержня переменного сечения при дискретизации на m элементов и на n узлов определяется уравнением $A^1 * T = B^1$

$$\left(\begin{array}{cccc} \boxed{A^{11}} & & & 0 \\ & \boxed{A^{12}} & & \\ & & \dots & \\ & & & \boxed{A^{ii}} \\ & 0 & & \dots \\ & & & & \boxed{A^{im}} \end{array} \right) * \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \dots \\ T_i \\ \dots \\ T_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \dots \\ B_i \\ \dots \\ B_n \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

где $n=2m+1$.

$$A^{ii} = \begin{bmatrix} A_{00}^{ii} = k\pi \left(\frac{l^2 a}{30} + \frac{4lb_i}{15} \right) & A_{01}^{ii} = k\pi \frac{2lb_i}{15} & A_{02}^{ii} = k\pi \left(-\frac{l^2 a}{30} - \frac{lb_i}{15} \right) \\ A_{10}^{ii} = k\pi \frac{2lb_i}{15} & A_{11}^{ii} = k\pi \left(\frac{8l^2 a}{15} + \frac{16lb_i}{15} \right) & A_{12}^{ii} = k\pi \left(\frac{2l^2 a}{15} + \frac{2lb_i}{15} \right) \\ A_{20}^{ii} = k\pi \left(-\frac{l^2 a}{30} - \frac{lb_i}{15} \right) & A_{21}^{ii} = k\pi \left(\frac{2l^2 a}{15} + \frac{2lb_i}{15} \right) & A_{22}^{ii} = k\pi \left(\frac{7l^2 a}{30} + \frac{4lb_i}{15} \right) \end{bmatrix}$$

В последней матрице элемент $A_{22}^n = A_{22}^n + L^2 \pi a^2 h + 2L\pi ab_n h + \pi b_n^2 h$.

$$B_j^i = 0, \quad j = \overline{0, 2}$$

Если с левого торца стержня подается тепловой поток, то

$$B_0^1 = -2\pi q_l b_0^2,$$

Если с правого торца стержня подается тепловой поток, то

$$B_n^1 = \pi h T_{oc} \left(L^2 a^2 + 2Lab + b_n^2 \right).$$

Если на левом торце стержня поддерживается температура T_l , то

$$B_0 = B_0 + A_{00} * T_l;$$

$$B_1 = B_1 - A_{10} * T_l;$$

$$B_2 = B_2 - A_{20} * T_l;$$

$$A_{0j} = 0, \text{ для всех } j > 0,$$

$$A_{i0} = 0, \text{ для всех } i > 0.$$

Если i -ый элемент не теплоизолирован правая часть формируется из вектора:

$$B_i^2 = \frac{L\pi T_{ocb} h_b}{3} \begin{pmatrix} b_0 \\ La + 2b_0 \\ La + b_m \end{pmatrix}$$

Решение дает значения температуры в узловых точках $T_i^* = 0, i = \overline{1, n}$.

Закон распределения температуры определяется как:

$$T(x) = \begin{cases} \phi_1(x)T_{i_1}^* + \phi_2(x)T_{i_2}^* + \phi_3(x)T_{i_3}^* & \text{если } x_1 \leq x \leq x_3; \\ \phi_3(x)T_{i_3}^* + \phi_4(x)T_{i_4}^* + \phi_5(x)T_{i_5}^* & \text{если } x_3 \leq x \leq x_5; \\ \dots & \dots \\ \phi_{n-2}(x)T_{i_{n-2}}^* + \phi_{n-1}(x)T_{i_{n-1}}^* + \phi_n(x)T_{i_n}^* & \text{если } x_{n-2} \leq x \leq x_n. \end{cases}$$

Основные термомеханические характеристики стержня определяются как:

- 1) Удлинение стержня Δl :

$$\Delta L = \int_0^L \alpha(T(x)) dx. \quad (3.25)$$

- 2) Осевое термическое усилие R :

$$R = -\frac{\Delta LE}{F} = -\frac{\Delta LE}{\pi r^2}. \quad (3.26)$$

- 3) Термо-упругое напряжение σ :

$$\sigma = \frac{R}{F} = -\frac{\Delta LE}{L}. \quad (3.27)$$

- 4) Термо-упругая деформация ε :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = -\frac{\Delta L}{L}. \quad (3.28)$$

- 5) Температурная деформация $\varepsilon_T(x)$:

$$\varepsilon_T(x) = -\alpha T(x). \quad (3.29)$$

- 6) Температурное напряжение $\sigma_T(x)$:

$$\sigma_T(x) = E\varepsilon_T(x). \quad (3.30)$$

7) Упругая деформация $\varepsilon_x(x)$:

$$\varepsilon_x(x) = \varepsilon - \varepsilon_T(x). \quad (3.31)$$

8) Упругое напряжение $\sigma_x(x)$:

$$\sigma_x(x) = \sigma - \sigma_T(x). \quad (3.32)$$

9) Перемещение, которое определяется как

$$u(x) = \int_0^x \varepsilon(z) dz. \quad (3.33)$$

3.3 Методы определения теплофизического состояния стержня переменного сечения ограниченной длины

3.3.1 Определение величины удлинения стержня и возникающего осевого усилия при наличии теплового потока и теплоизоляций.

Присутствие температурного поля приводит к удлинению несущих элементов, таких как стержни с переменным сечением, особенно когда один конец фиксирован, а другой оставлен свободным. Расчет величины этого удлинения для стержня с переменным сечением, с учетом теплового потока, изоляции и конвективного обмена теплом, представляет собой значимую задачу в области машиностроения. Применяя дискретизацию такого стержня тремя отдельными элементами, можно наглядно демонстрировать методику определения удлинения. Известно, что величина удлинения стержня при заданном температурном поле определяется следующим образом:

$$\Delta l_T = \int_0^L \alpha T(x) dx \quad (3.34)$$

Кроме того, здесь обозначает коэффициент линейного теплового расширения $\alpha[1/^\circ\text{C}]$ материала стержня. Для различных типов стали этот коэффициент был установлен экспериментально при конкретных температурных условиях. Следовательно, при условии постоянства коэффициента $\alpha = \text{const}$, формула (3.34) преобразуется в такой вид:

$$\Delta l_T = \alpha \int_0^L T(x) dx \quad (3.35)$$

Если α не является постоянной величиной, то его значение будет изменяться в зависимости от температуры. Поскольку температура вдоль стержня может меняться в зависимости от его расположения, значение α также будет меняться в соответствии с координатами. В общем виде это выражается следующим образом:

$$\alpha = \alpha(T(x)) \quad (3.36)$$

Данная функциональная связь устанавливается экспериментально для каждого типа материала стержня в индивидуальном порядке. Экспериментальные данные демонстрируют, что при повышении температуры происходит рост значения коэффициента теплового расширения.

3.3.2 Метод определения величины осевого сжимающего усилия в стержне переменного сечения в случае защемления его концов.

Допустим, что изучаемый стержень с переменной площадью сечения и ограниченной длиной фиксирован на обоих концах. Из-за воздействия теплового потока и изоляции боковой поверхности стержень подвергается нагреву. Поскольку концы стержня неподвижно закреплены, удлинение стержня невозможно, что приводит к возникновению в нем осевого сжатия. Теперь рассмотрим процесс определения этого сжимающего усилия. В качестве модели возьмем стержень с переменным сечением, закрепленный с левой стороны, в то время как правый конец оставлен свободным. К правому концу приложена растягивающая сила R [кГ]. Схема для расчетов по данной задаче изображена на рисунке 3.3.

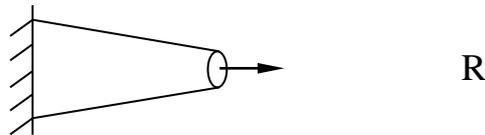


Рисунок -3.3. Стержень, защемленный левым концом

Очевидно, что при действии растягивающей силы R , стержень испытывает удлинение. Размер этого удлинения вычисляется в соответствии с законом Гука следующим образом:

$$\Delta l_R = \frac{Rl}{EF} \quad (3.37)$$

Из-за воздействия источников тепла, стержень подвергается нагреванию, и если один из концов не закреплен, он будет удлиняться на величину, рассчитываемую согласно формуле (3.37). Однако, поскольку оба конца стержня неподвижно зафиксированы, удлинение стержня становится невозможным. Исходя из этого, для условий совместности деформаций можно составить следующее уравнение:

$$\Delta l_R + \Delta l_T = 0 \quad (3.38)$$

Подставляя (3.35) и (3.37), получим следующее уравнение

$$\frac{RL}{E \bar{F}} + \int_0^L \alpha T(x) dx = 0 \quad (3.39)$$

Определим значение возникающего осевого усилия:

$$R = - \frac{E \bar{F} \cdot \Delta l_T}{L} \quad (3.40)$$

Размерность осевого усилия выражается в [кГ]. Отметим, что $E[\frac{\kappa \Gamma}{\text{см}^2}]$ - модуль упругости материала рассматриваемого стержня.

$$\bar{F} = \frac{\int_0^L F(x) dx}{L} \quad (3.41)$$

$\bar{F}[\text{см}^2]$ – среднее значение тепловой площади поперечных сечений вдоль всей длины анализируемого стержня с переменным сечением. В случае, когда площадь поперечных сечений изменяется линейно в зависимости от координаты по формуле $F(x)=ax+b$, где $0 \leq x \leq L$, то величина F определяется по формуле (3.41)

$$\bar{F} = \frac{\int_0^L F(x) dx}{L} = \frac{al}{2} + b \quad (3.42)$$

Из проведенного расчета очевидно, что при учете заданных граничных условий, геометрии переменного сечения стержня, его длины, а также физико-механических и тепловых свойств материала, осевое сжимающее усилие R , возникающее при фиксации стержня с обоих концов, достигает значительной величины. Стоит подчеркнуть, что такие значительные нагрузки способны выдержать только материалы с высокой жаропрочностью и тугоплавкостью, предназначенные для специфических применений.

3.3.3 Определение законов распределения составляющих деформаций и напряжений по длине заземленного двумя концами стержня переменного сечения.

Рассмотрим горизонтальный стержень с переменным сечением и ограниченной длиной. Форма поперечного сечения этого стержня линейно изменяется вдоль его длины по формуле $F(x)=\pi \cdot (ax+b)^2$, где $0 \leq x \leq L$, при этом a и b являются заданными константами, а L обозначает длину стержня. Боковая поверхность стержня по всей длине изолирована от тепла. Стержень фиксирован с обоих концов, что приводит к возникновению в нем сжимающего осевого усилия R , а также к появлению термоупругих, температурных и упругих компонент напряжений и деформаций, а также распределения перемещений внутри стержня. Начнем с определения закона распределения

термоупругой составляющей напряжения, который будет вычислен в соответствии с законом Гука.

$$\sigma(x) = -\frac{R}{F(x)}. \quad (3.43)$$

Присутствие знака минус указывает на то, что термоупругая составляющая напряжения обладает сжимающим свойством. Далее, давайте перейдем к определению закона, по которому распределяется термоупругая составляющая деформации.

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E}. \quad (3.44)$$

E – модуль упругости материала стержня.

Правило, определяющее распределение температурного компонента деформации:

$$\varepsilon_T(x) = -\alpha \cdot T(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (3.45)$$

Из анализа следует, что величина по длине всего изучаемого стержня принимает отрицательные значения, что указывает на сжатие вследствие температурного воздействия на деформацию в каждом сечении стержня. Используя обобщенный закон Гука, можно вывести распределение температурного компонента напряжений.

$$\sigma_T(x) = -\alpha \cdot E \cdot T(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (3.46)$$

Далее переходим к определению распределения упругого компонента деформаций. Основываясь на фундаментальных принципах теплофизики и термоупругости, это распределение выражается следующим образом:

$$\varepsilon_x(x) = \varepsilon - \varepsilon_T(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (3.47)$$

$$\sigma_x(x) = \sigma - \sigma_T(x) = E(\varepsilon - \varepsilon_T(x)) = E \cdot \varepsilon_x(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (3.48)$$

3.3.4 Определение закона распределения перемещения по длине стержня переменного сечения

Под влиянием теплового потока, при условии боковой теплоизоляции и наличия обмена теплом на торцах, зафиксированные сечения анализируемого стержня испытывают смещение. Необходимо установить закон распределения перемещений вдоль стержня с переменным сечением, учитывая совместное действие теплового потока, теплоизоляции и теплообмена. Распределение перемещений будет определено для каждого дискретного элемента вдоль его длины отдельно. Согласно классическому соотношению Коши, связь между упругой деформацией и перемещением выражается следующим образом:

$$\varepsilon_x(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x}, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (3.49)$$

здесь $u(x)$ – поле перемещения. Из соотношения (3.49) определим $u(x)$.

$$u(x) = \int \varepsilon_x(x) dx, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (3.50)$$

Значение $u(x)$ вычисляется при условии защемления левого конца стержня $u(x=0) = 0$.

3.3.5 Расчет перемещения с использованием потенциальной энергии упругих деформаций при наличии источников тепла

Исследуем горизонтальный стержень с ограниченной длиной L [см], причем его ось располагается горизонтально от левого конца к правому. Площадь поперечного сечения изменяется линейно в соответствии с законом $F(x) = \pi \cdot (ax + b)^2$, где $0 \leq x \leq L$. Делим стержень на три дискретных сегмента равной длины. Анализируем один из таких сегментов длиной $x = \Delta x$. Вводим локальную систему координат для этого сегмента. Позицию сечения, находящегося в начальной точке этого сегмента ($x=0$), обозначаем как $u(x=0) = u_i$. Перемещение на другом конце сегмента, в точке $x = \Delta x$, обозначим как $u(x = \Delta x) = u_j$. Распределение перемещений вдоль сегмента аппроксимируем с помощью полного полинома второй степени.

$$u(x) = ax^2 + bx + c, \quad 0 \leq x \leq l, \quad a, b, c = const. \quad (3.51)$$

На основе выше приведенных условий можно построить следующую систему уравнений для определения значений a, b и c .

$$\left. \begin{aligned} u(x=0) &= a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = u_i \\ u(x = \frac{l}{2}) &= a \cdot \frac{l^2}{4} + b \cdot \frac{l}{2} + c = u_j \\ u(x=l) &= a \cdot l^2 + b \cdot l + c = u_k \end{aligned} \right\} \quad (3.52)$$

Из первого уравнения находим c .

$$c = u_i. \quad (3.53)$$

Подставляя найденное значение c в систему (3.52) имеем

$$\left. \begin{aligned} a \cdot l^2 + 2 \cdot b \cdot l &= 4u_j - 4u_i \\ a \cdot l^2 + b \cdot l &= u_k - u_i \end{aligned} \right\} \quad (3.54)$$

Получим

$$b \cdot l = 4u_j - 4u_i - u_k + u_i = 4u_j - 3u_i - u_k. \quad (3.55)$$

Находим значение

$$b = \frac{4u_j - 3u_i - u_k}{l}. \quad (3.56)$$

Полученное значение b подставляем во второе уравнение системы (3.54) и определим значения a .

$$a \cdot l^2 = u_k - u_i - 4u_j + 3u_i + u_k = 2u_k + 2u_i - 4u_j \quad \text{или}$$

$$a^2 = \frac{2u_k + 2u_i - 4u_j}{l^2}. \quad (3.57)$$

Подставляя значения a , b и c из (3.53, 3.56-57) в выражение $u(x)$ вычислим закон распределения температуры по длине исследуемого дискретного элемента.

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{2u_k + 2u_i - 4u_j}{l^2} \cdot x^2 + \frac{4u_j - 3u_i - u_k}{l} \cdot x + u_i = \left(\frac{2x^2}{l^2} - \frac{3x}{l} + 1\right)u_i + \left(\frac{4x}{l} - \frac{4x^2}{l^2}\right)u_j + \left(\frac{2x^2}{l^2} - \frac{x}{l}\right)u_k = \\ &= \left(\frac{2x^2 - 3lx + l^2}{l^2}\right)u_i + \left(\frac{4lx - 4x^2}{l^2}\right)u_j + \left(\frac{2x^2 - lx}{l^2}\right)u_k, \quad 0 \leq x \leq l. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Вводим обозначения:

$$\varphi_i(x) = \left(\frac{2x^2 - 3lx + l^2}{l^2}\right)u_i, \quad \varphi_j(x) = \left(\frac{4lx - 4x^2}{l^2}\right)u_j, \quad \varphi_k(x) = \left(\frac{2x^2 - lx}{l^2}\right)u_k, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (3.59)$$

Полученные функции обозначим как аппроксимационные сплайн функции в локальной системе координат. В результате исследований выяснилось, что эти функции имеют следующие свойства:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x = 0 \\ 0, & \text{при } x = \frac{l}{2} \\ 0, & \text{при } x = l \end{cases}, \quad \varphi_j(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x = 0 \\ 1, & \text{при } x = \frac{l}{2} \\ 0, & \text{при } x = l \end{cases}, \quad \varphi_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x = 0 \\ 0, & \text{при } x = \frac{l}{2} \\ 1, & \text{при } x = l \end{cases}. \quad (3.60)$$

$$\varphi_i(x) + \varphi_j(x) + \varphi_k(x) = 1. \quad (3.61)$$

Вычислим градиент перемещения :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} u_i + \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} u_j + \frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x} u_k = \frac{4x - 3l}{l^2} u_i + \frac{4l - 8x}{l^2} u_j + \frac{4x - l}{l^2} u_k, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (3.62)$$

Отсюда получим :

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_k}{\partial x} = 0. \quad (3.63)$$

3.3.6 Определение перемещения с использованием функционала потенциальной энергии упругой деформации при наличии поля температуры

Рассматривается горизонтальный стержень переменного сечения ограниченной длины, который зашпелен двумя концами. Стержень находится под воздействием теплового потока, соответственно в нем возникает поле температуры. Значение функционала потенциальной энергии упругих деформаций для рассматриваемого стержня, имеет следующий вид:

$$\Pi = \int_v \frac{\sigma_x}{2} \varepsilon_x dv - \int_v \alpha E \varepsilon_x T(x) dv, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (3.64)$$

Здесь $\sigma(x)$ – закон распределения упругой составляющей напряжения; $\varepsilon_x(x)$ – поле распределения упругой составляющей деформации, v – объем исследуемого стержня, α – коэффициент теплового расширения материала стержня; E – модуль упругости стержня; $T(x)$ – закон распределения

температуры вдоль исследуемого стержня. Отношение между упругой составляющей деформации и перемещения устанавливается в соответствии фундаментального соотношения Коши:

$$\varepsilon_x(x) = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (3.65)$$

Связь между упругими составляющими напряжения и деформации устанавливается на основе закона Гука:

$$\sigma_x(x) = E \cdot \varepsilon_x(x) = E \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (3.66)$$

Так же следует отметить градиент перемещения определяется формулой (3.61). Тогда подставляя (3.63) и (3.64) в выражение функционала потенциальной энергии упругих деформации (3.62) получим следующее

$$\Pi = \frac{E}{2} \int_v \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dv - \alpha \cdot E \int_v \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) T(x) dv, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (3.67)$$

Подставляя выражения (3.62) в (3.67) получим:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{E}{2} \int_v \left[\frac{4x-3L}{L^2} u_i + \frac{4L-8x}{L^2} u_j + \frac{4x-L}{L^2} u_k \right]^2 dv - \alpha \cdot E \int_v \left[\left(\frac{4x-3L}{L^2} u_i + \frac{4L-8x}{L^2} u_j + \frac{4x-L}{L^2} u_k \right) \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{2x^2+3lx+l^2}{L^2} \cdot T_i + \frac{4lx+4x^2}{L^2} \cdot T_j + \frac{2x^2+lx}{L^2} \cdot T_k \right) \right] dv, \quad 0 \leq x \leq L. \end{aligned} \quad (3.68)$$

В данном случае объемный интеграл можно заменить на интеграл по длине, принимая во внимание изменчивость площади поперечного сечения анализируемого стержня. Следовательно, формула для потенциальной энергии принимает такой вид:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{E}{2} \int_0^l (ax+b) \left[\frac{4x-3L}{L^2} u_i + \frac{4L-8x}{L^2} u_j + \frac{4x-L}{L^2} u_k \right]^2 dx - \alpha \cdot E \int_0^l (ax+b) \left[\left(\frac{4x-3L}{L^2} u_i + \frac{4L-8x}{L^2} u_j + \frac{4x-L}{L^2} u_k \right) \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{2x^2+3lx+l^2}{L^2} \cdot T_i + \frac{4lx+4x^2}{L^2} \cdot T_j + \frac{2x^2+lx}{L^2} \cdot T_k \right) \right] dx, \quad 0 \leq x \leq L. \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} \text{Здесь} \quad u_i &= u(x=0); \quad u_j = u\left(x = \frac{L}{2}\right); \quad u_k = u(x=L); \quad T_i = T(x=0); \\ T_j &= T\left(x = \frac{L}{2}\right); \quad T_k = T(x=L). \end{aligned}$$

Здесь учитывается, что площадь поперечного сечения исследуемого стержня меняется линейно. $F(x) = \pi \cdot (ax+b)^2$, a, b – const, $0 \leq x \leq L$. Для интегрирования рассмотрим следующее произведение:

$$\begin{aligned} (ax+b) \left[\frac{4x-3L}{L^2} u_i + \frac{4L-8x}{L^2} u_j + \frac{4x-L}{L^2} u_k \right]^2 = & (ax+b) \left[\frac{16x^2-24Lx+9L^2}{L^4} u_i^2 + \frac{16L^2-64Lx+64x^2}{L^4} u_j^2 + \right. \\ & \left. + \frac{16x^2-8Lx+L^2}{L^4} u_k^2 + 2 \frac{40Lx-32x^2-12L^2}{L^4} u_i u_j + 2 \frac{16x^2-16Lx+3L^2}{L^4} u_i u_k + 2 \frac{24Lx-4L^2-32x^2}{L^4} u_j u_k \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{L^4} [(16ax^3 - 24aLx^2 + 9aL^2x + 16bx^2 - 24bLx + 9bL^2)u_i^2 + (16aL^2x - 64aLx^2 + 64ax^3 + \\
&+ 16bL^2 + 64bLx + 64bx^2)u_j^2 + (16ax^3 - 8aLx^2 + aL^2x + 16bx^2 - 8bLx + bL^2)u_k^2 + (80aLx^2 - \\
&- 64ax^3 - 24aL^2x + 80bLx - 64bx^2 - 24bL^2)u_iu_j + (32ax^3 - 32aLx^2 + 6aL^2x + 32bx^2 - \\
&- 32bLx + 6bL^2)u_iu_k + (48aLx^2 - 8aL^2x - 64ax^3 + 48bLx - 8bL^2 - 64bx^2)u_ju_k], \\
&0 \leq x \leq L. \\
(3.70)
\end{aligned}$$

Вычислим произведение трех функций:

$$\begin{aligned}
&(ax+b) \left[\frac{4x-3L}{L^2} u_i + \frac{4L-8x}{L^2} u_j + \frac{4x-L}{L^2} u_k \right] \left[\frac{2x^2+3lx+l^2}{L^2} \cdot T_i + \frac{4lx+4x^2}{L^2} \cdot T_j + \frac{2x^2+lx}{L^2} \cdot T_k \right] = \\
&= \frac{1}{l^4} [(8ax^4 - 18alx^3 + 13al^2x^2 - 3al^3x + 8bx^3 - 18blx^2 + 13bl^2x - 3bl^3)u_iT_i + \\
&+ (28alx^3 - 16ax^4 - 12al^2x^2 + 28blx^2 - 16bx^3 - 12bl^2x)u_iT_j + \\
&+ (8ax^4 - 10alx^3 + 3al^2x^2 + 8bx^3 - 10blx^2 + 3bl^2x)u_iT_k + \\
&+ (32alx^3 - 20al^2x^2 + 4al^3x - 16ax^4 + 32blx^2 - 20bl^2x + 4bl^3 - 16bx^3)u_jT_i + \\
&+ (16al^2x^2 - 48alx^3 + 32ax^4 + 16bl^2x - 48blx^2 + 32bx^3)u_jT_j + \\
&+ (16alx^3 - 4al^2x^2 - 16ax^4 + 16blx^2 - 4bl^2x - 16bx^3)u_jT_k + \\
&+ (8ax^4 - 14alx^3 + 7al^2x^2 - al^3x + 8bx^3 - 14blx^2 + 7bl^2x - bl^3)u_kT_i + \\
&+ (20alx^3 - 16ax^4 - 4al^2x^2 + 20blx^2 - 16bx^3 - 4bl^2x)u_kT_j + \\
&+ (8ax^4 - 6alx^3 + al^2x^2 + al^3x + 8bx^3 - 6blx^2 + bl^2x)u_kT_k], \quad 0 \leq x \leq l \quad (3.71)
\end{aligned}$$

Теперь подставляя (3.70) и (3.71) в выражение (3.69) получим

$$\begin{aligned}
\Pi &= \frac{E}{2l^4} \int_0^l [(16ax^3 - 24aLx^2 + 9aL^2x + 16bx^2 - 24bLx + 9bL^2)u_i^2 + (16aL^2x - 64aLx^2 + \\
&+ 64ax^3 + 16bL^2 + 64bLx + 64bx^2)u_j^2 + (16ax^3 - 8aLx^2 + aL^2x + 16bx^2 - 8bLx + bL^2)u_k^2 + \\
&+ (80aLx^2 - 64ax^3 - 24aL^2x + 80bLx - 64bx^2 - 24bL^2)u_iu_j + (32ax^3 - 32aLx^2 + 6aL^2x + \\
&+ 32bx^2 - 32bLx + 6bL^2)u_iu_k + (48aLx^2 - 8aL^2x - 64ax^3 + 48bLx - 8bL^2 - 64bx^2)u_ju_k] dx - \\
&- \frac{\alpha E}{l^4} \int_0^l [(8ax^4 - 18alx^3 + 13al^2x^2 - 3al^3x + 8bx^3 - 18blx^2 + 13bl^2x - 3bl^3)u_iT_i + (28alx^3 - \\
&16ax^4 - 12al^2x^2 + 28blx^2 - 16bx^3 - 12bl^2x)u_iT_j + (8ax^4 - 10alx^3 + 3al^2x^2 + 8bx^3 - 10blx^2 + \\
&+ 3bl^2x)u_iT_k + (32alx^3 - 20al^2x^2 + 4al^3x - 16ax^4 + 32blx^2 - 20bl^2x + 4bl^3 - 16bx^3)u_jT_i + \\
&+ (16al^2x^2 - 48alx^3 + 32ax^4 + 16bl^2x - 48blx^2 + 32bx^3)u_jT_j + (16alx^3 - 4al^2x^2 - 16ax^4 + 16blx^2 - 4bl^2x - \\
&- 16bx^3)u_jT_k + (8ax^4 - 14alx^3 + 7al^2x^2 - al^3x + 8bx^3 - 14blx^2 + 7bl^2x - bl^3)u_kT_i + (20alx^3 - 16ax^4 - 4al^2x^2 + \\
&+ 20blx^2 - 16bx^3 - 4bl^2x)u_kT_j + (8ax^4 - 6alx^3 + al^2x^2 + al^3x + 8bx^3 - 6blx^2 + bl^2x)u_kT_k] dx = \\
&= \frac{E}{2} \left[\left(\frac{al}{2} + \frac{7b}{3} \right) u_i^2 + \left(\frac{8al}{3} + \frac{16b}{3} \right) u_j^2 + \left(\frac{11al}{6} + \frac{7b}{3} \right) u_k^2 + \left(-\frac{4al}{3} - \frac{16}{3} \right) u_iu_j + \left(\frac{al}{3} + \frac{2b}{3} \right) u_iu_k + \left(-4al - \frac{16b}{3} \right) \right] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha E \left[\left(-\frac{al}{15} - \frac{b}{2} \right) u_i T_i + \left(-\frac{al}{5} - \frac{2b}{3} \right) u_i T_j + \left(\frac{al}{10} + \frac{b}{6} \right) u_i T_k + \left(\frac{2al}{15} + \frac{2b}{3} \right) u_j T_i + \left(-\frac{4al}{15} \right) u_j T_j + \left(-\frac{8al}{15} - \frac{2b}{3} \right) u_j T_k + \right. \\
&\left. + \left(-\frac{al}{15} - \frac{b}{6} \right) u_k T_i + \left(\frac{7al}{15} + \frac{2b}{3} \right) u_k T_j + \left(\frac{13al}{30} + \frac{b}{2} \right) u_k T_k \right], \quad 0 \leq x \leq l.
\end{aligned} \tag{3.72}$$

Минимизируя по узловым значениям перемещений потенциальную энергию упругих деформации, получим систему линейных алгебраических уравнений для значений перемещения.

$$\left. \begin{aligned}
1) \quad \frac{\partial \dot{I}}{\partial u_2} = 0; &\Rightarrow 2 \left(\frac{8al}{3} + \frac{16b}{3} \right) u_2 - (4al + \frac{16b}{3}) u_3 = 2\alpha l \left[\left(\frac{2al}{15} + \frac{2b}{3} \right) T_1 - \frac{4al}{15} T_2 - \left(\frac{8al}{3} + \frac{2b}{3} \right) T_3 \right] \\
2) \quad \frac{\partial \dot{I}}{\partial u_3} = 0; &\Rightarrow -(4al + \frac{16b}{3}) u_2 - \left(\frac{4al}{3} + \frac{14(b+b_1)}{3} \right) u_3 - \left(\frac{4al}{3} + \frac{16b_1}{3} \right) u_4 + \left(\frac{al}{3} + \frac{2b_1}{3} \right) u_5 = \\
&= 2\alpha l \left[-\left(\frac{al}{15} + \frac{b}{6} \right) T_1 + \left(\frac{7al}{15} + \frac{2b}{3} \right) T_2 + \left(\frac{11al}{30} + \frac{(b+b_1)}{2} \right) T_3 - \left(\frac{al}{5} + \frac{2b_1}{3} \right) T_4 + \left(\frac{al}{10} + \frac{b_1}{6} \right) T_5 \right] \\
3) \quad \frac{\partial \dot{I}}{\partial u_4} = 0; &\Rightarrow -\left(\frac{4al}{3} + \frac{16b_1}{3} \right) u_3 + 2 \left(\frac{8al}{3} + \frac{16b_1}{3} \right) u_4 - (4al + \frac{16b_1}{3}) u_5 = 2\alpha l \left[\left(\frac{2al}{15} + \frac{2b_1}{3} \right) T_3 - \frac{4al}{15} T_4 - \left(\frac{8al}{3} + \frac{2b_1}{3} \right) T_5 \right] \\
4) \quad \frac{\partial \dot{I}}{\partial u_5} = 0; &\Rightarrow \left(\frac{al}{3} + \frac{2b_1}{3} \right) u_3 - (4al + \frac{16b_1}{3}) u_4 + \left(\frac{14al}{3} + \frac{7(b_1+b_2)}{3} \right) u_5 - \left(\frac{4al}{3} + \frac{16b_2}{3} \right) u_6 = 2\alpha l \left[-\left(\frac{al}{15} + \frac{b_1}{6} \right) T_3 + \right. \\
&\left. \left(\frac{7al}{15} + \frac{2b_1}{3} \right) T_4 + \left(\frac{11al}{30} + \frac{b_1-b_2}{2} \right) T_5 - \left(\frac{al}{5} + \frac{2b_2}{3} \right) T_6 + \left(\frac{al}{10} + \frac{b_2}{6} \right) T_7 \right] \\
5) \quad \frac{\partial \dot{I}}{\partial u_6} = 0; &\Rightarrow \left[2 \left(\frac{8al}{3} + \frac{16b_2}{3} \right) u_5 - \left(\frac{4al}{3} + \frac{16b_2}{3} \right) u_6 \right] = 2\alpha l \left[\left(\frac{2al}{15} + \frac{2b_2}{3} \right) T_5 - \left(\frac{4al}{15} \right) T_6 + \left(\frac{8al}{15} + \frac{2b_2}{3} \right) T_7 \right]
\end{aligned} \right\} \tag{3.73}$$

Подставляя значения исходных данных в (3.73) получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned}
1) \quad \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = 0; &\Rightarrow \frac{352}{3} u_2 - 56 u_3 = 1,5657 \\
2) \quad \frac{\partial \Pi}{\partial u_3} = 0; &\Rightarrow -56 u_2 + \frac{280}{3} u_3 - \frac{152}{3} u_4 + 6 u_5 = 0,7396 \\
3) \quad \frac{\partial \Pi}{\partial u_4} = 0; &\Rightarrow -\frac{152}{3} u_3 + \frac{288}{3} u_4 - \frac{136}{3} u_5 = 1,3852 \\
4) \quad \frac{\partial \Pi}{\partial u_5} = 0; &\Rightarrow 6 u_3 - \frac{136}{3} u_4 + \frac{224}{3} u_5 - 40 u_6 = 0,07578 \\
5) \quad \frac{\partial \Pi}{\partial u_6} = 0; &\Rightarrow -40 u_5 + \frac{224}{3} u_6 = 1,15928
\end{aligned} \right\} \tag{3.74}$$

При известных узловых значениях перемещения можно построить закон распределения перемещения вдоль длины каждого дискретного элемента и всего стержня.

Выводы по третьему разделу

1. Были определены задачи, связанные с тепловым состоянием стержня с переменным сечением. Уникальность предложенного подхода заключается в его способности интегрировать естественные граничные условия в рамках принципа сохранения энергии, принимая во внимание нелинейное изменение сечения стержня. Разработанный метод обеспечивает возможность одновременно учитывать наличие множества локальных неоднородных источников тепла и различные типы теплоизоляции, что дает возможность рассчитывать тепловые нагрузки на стержень переменного сечения.

Основное внимание уделено вариационному методу исследования теплофизического состояния стержня ограниченной длины в условиях одновременного воздействия локальных тепловых потоков, теплообмена и теплоизоляции.

2. В результате расчетов получены зависимости температурного поля, полей деформаций и напряжений.

3. Производится расчет поля перемещений, на основе которого строится график.

4 РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ И ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ДЛЯ РАСЧЕТОВ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ.

4.1 Алгоритмы для оценки теплофизических характеристик стержня переменного сечения

Алгоритм формирования функционала в стержне

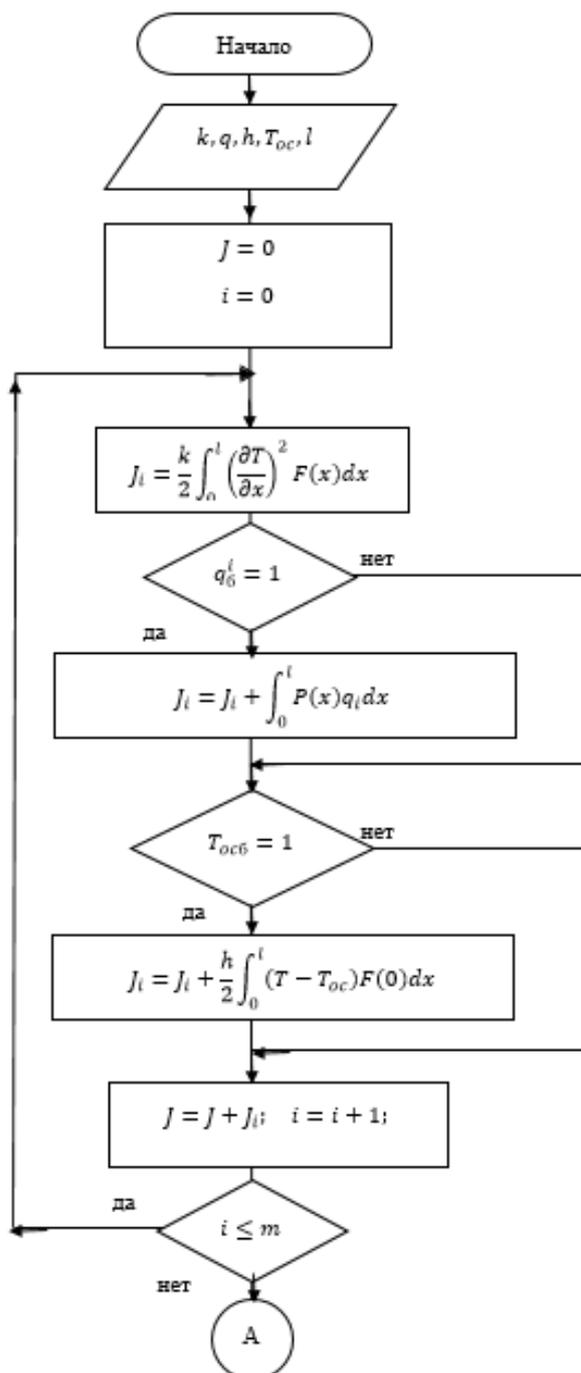
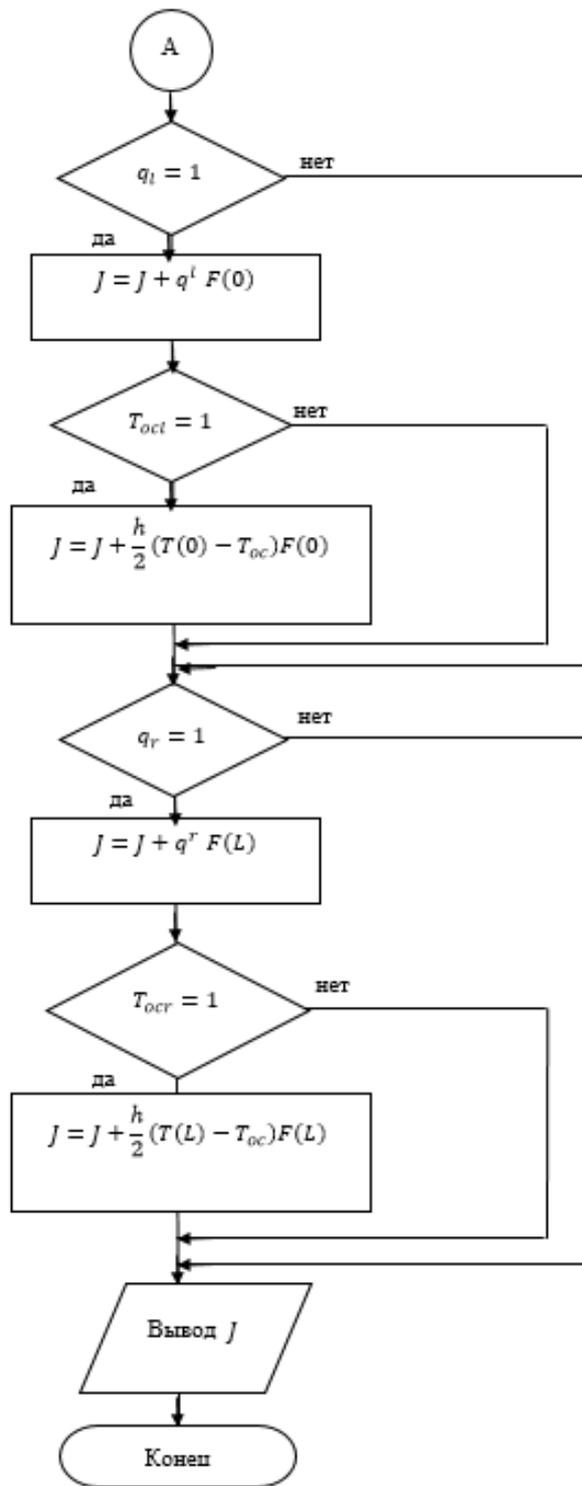


Рисунок 4.1 -Алгоритм формирования функционала J в стержне



Продолжение рисунка 4.1.

На изображении представлена блок-схема алгоритма, который описывает последовательность действий для расчёта J – формирование функционала,

решением которого будет функция температуры. Вот шаги алгоритма согласно блок-схеме:

1. Инициализация: Ввод начальных данных, таких как теплопроводность k , размеры, температура окружающей среды T_{oc} ;
2. Обнуление индекса i и суммарной величины J ;
3. Вычисление интеграла J_i , что представляет вклад в общую величину J от теплопроводности через сечение стержня;
4. Проверка условий наличия источников тепла (обозначено как $qs=1$) и теплообмена (обозначено как $T_{oc}=1$) Если есть источник тепла, то к J_i добавляется интеграл $\int q(x)dx$, где $q(x)$ - плотность источников тепла. Если происходит теплообмен, то к J_i добавляется интеграл $\int h/2(T - T_{oc})^2 dx$, где h - коэффициент теплоотдачи, T - текущая температура, T_{oc} - температура окружающей среды;
5. Обновление общей величины J путём добавления J_i ;
6. Увеличение индекса i на единицу и проверка условия $i \leq n$, где n — количество интервалов или элементов расчёта;
7. Если условие удовлетворено, алгоритм возвращается к шагу 3 для следующего интервала;
8. Если i превышает n , алгоритм завершается и выдает значение J ;
9. Условие наличия источника тепла слева: Если да, к текущему значению J добавляется вклад от левого источника тепла, умноженного на функцию $F(0)$, которая, возможно, представляет начальное условие или параметр функции распределения в начале стержня;
10. Условие наличия источника тепла справа: Если да, к текущему значению J добавляется вклад от конвективного теплообмена слева, который пропорционален разности квадратов температур, умноженной на функцию $F(0)$ и коэффициент теплоотдачи h . Если да, к текущему значению J добавляется вклад от правого источника тепла, умноженного на функцию $F(L)$, которая, возможно, представляет условие или параметр функции распределения в конце стержня;
11. После применения всех необходимых условий и добавлений выводится конечное значение J ;
12. Алгоритм завершается.

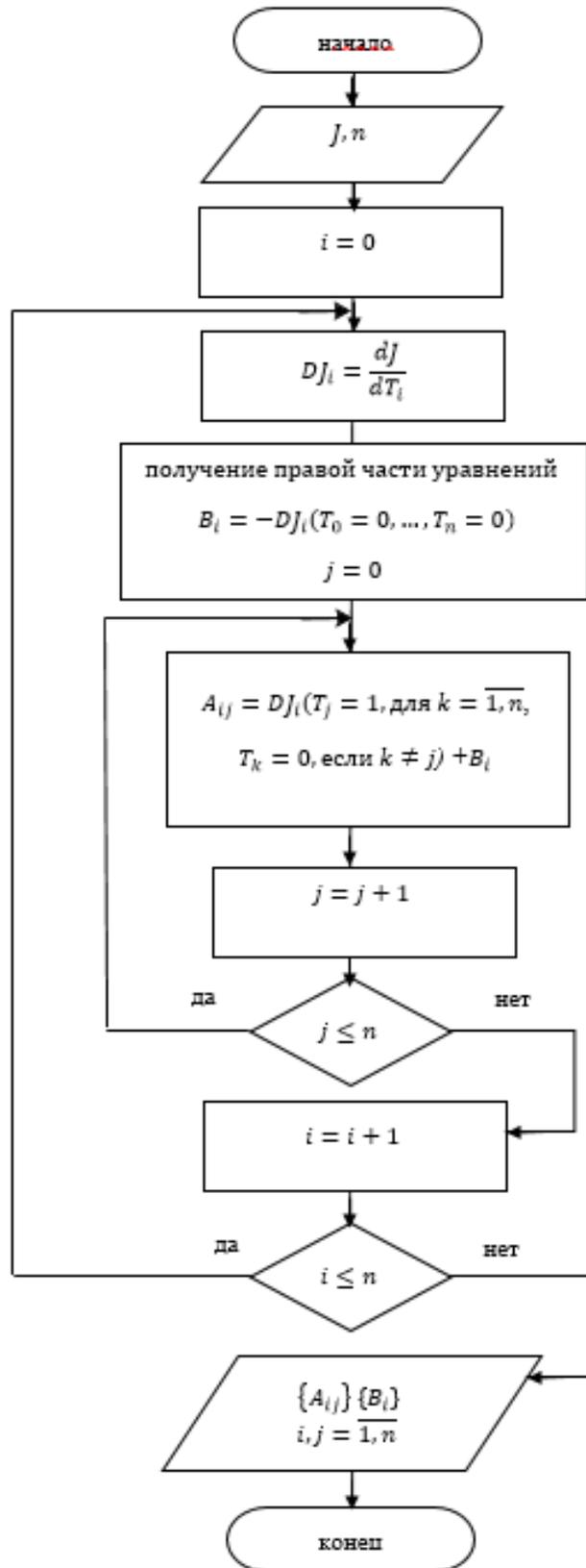


Рисунок 4.2- Алгоритм формирования СЛУ для $T(x)$

Рисунок 4.2 представляет собой процедуру создания системы линейных уравнений (СЛУ) для расчета распределения температуры вдоль стержня $T(x)$.

Этот процесс включает в себя установление связи между температурой и положением в пределах стержня и является основой для анализа тепловых свойств материала.

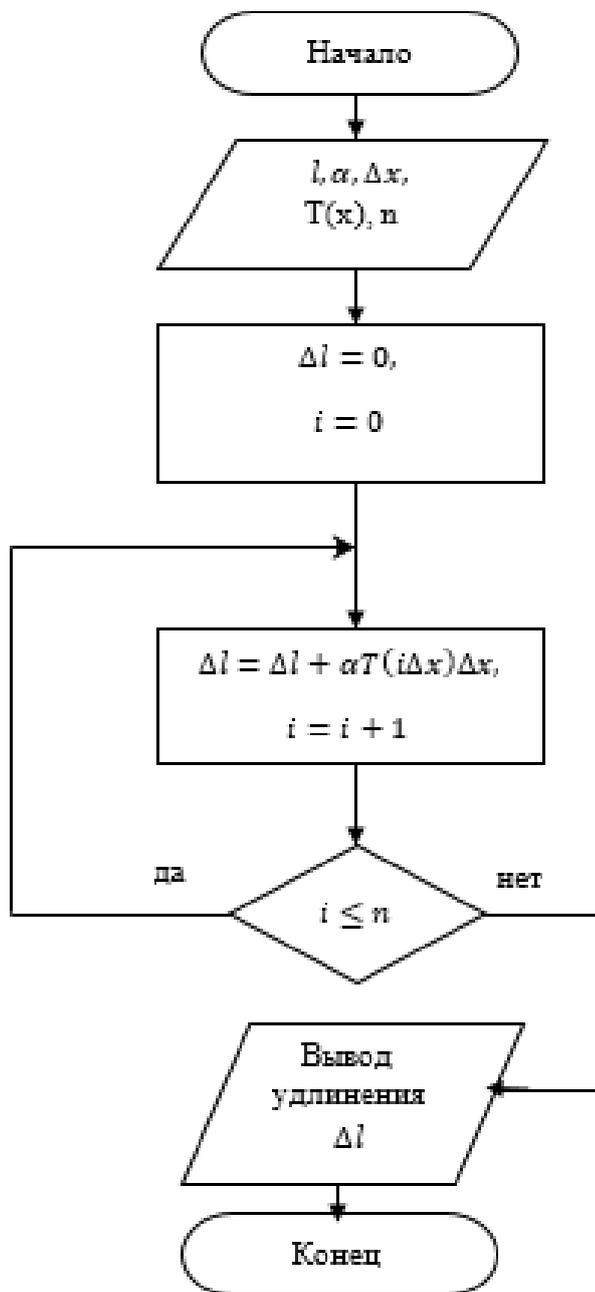


Рисунок 4.3 - Алгоритм вычисления удлинения

Рисунок 4.3 представляет алгоритм для определения удлинения стержня под воздействием температурного градиента. Алгоритм использует распределение температуры для расчета теплового расширения и последующего удлинения материала.

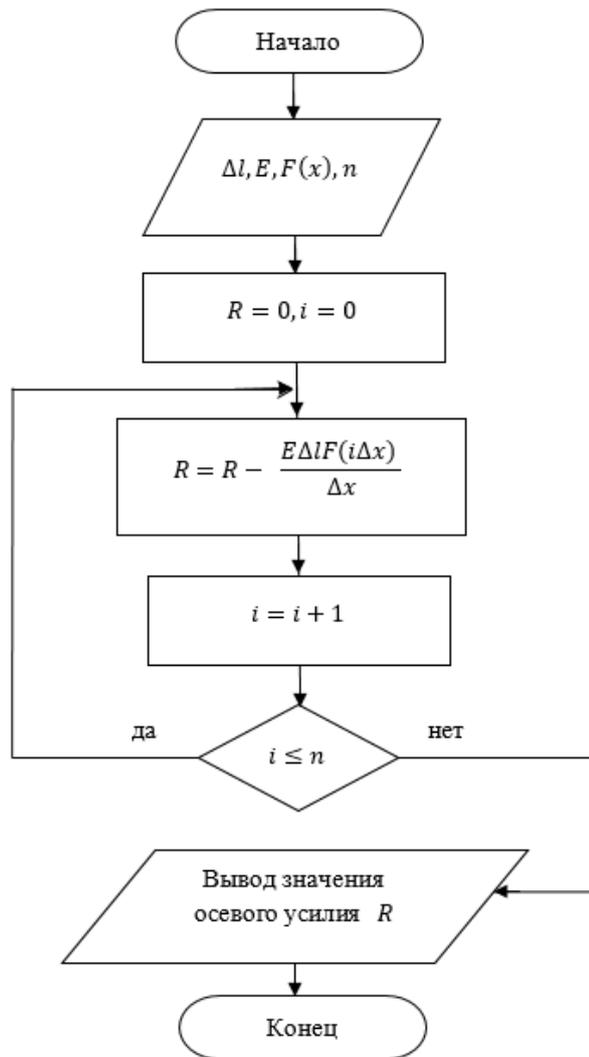


Рисунок 4.4 - Алгоритм вычисления осевого усилия

Алгоритм на рисунке 4.4 описывает процесс определения осевого усилия, возникающего в стержне из-за теплового расширения и других нагрузок. Осевое усилие важно для понимания, как температура и внешние силы могут вызвать внутренние напряжения в материале.

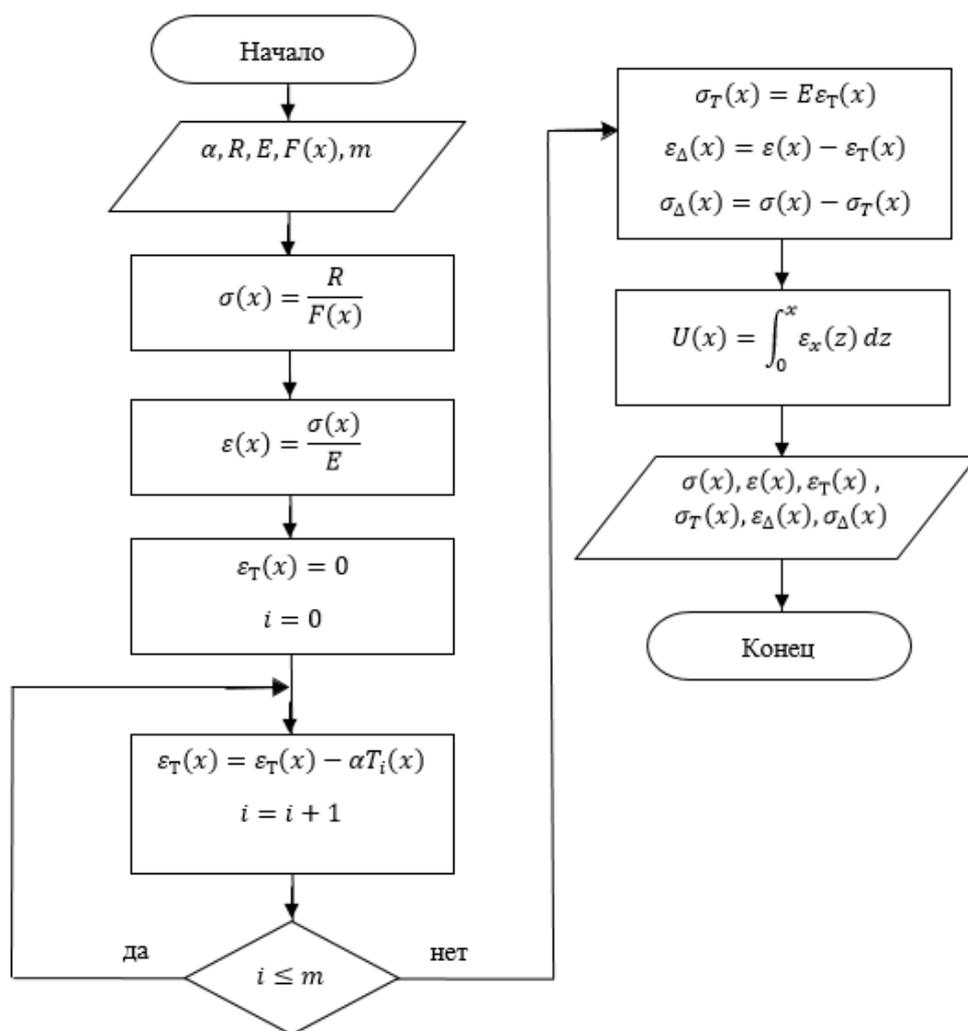


Рисунок 4.5 - Алгоритм вычисления напряжения, деформации и перемещения

Алгоритм представленный на рисунке 4.5 предназначен для расчета напряжения и деформации, возникающих в стержне, а также перемещения его частей под воздействием теплового градиента и приложенных сил. Это ключевые показатели для анализа прочности и устойчивости конструкции.

Каждый из этих алгоритмов представляет отдельный этап комплексного анализа тепломеханического состояния стержня переменного сечения и является самостоятельным модулем в системе ASIR.

4.2 Разработка автоматизированной системы исследования термофизического состояния стержня

4.2.1 Диаграммы компонентов программного комплекса

Программный комплекс ASIR представляет собой универсальную платформу для конечно-элементного анализа, обладающую функционалом для решения как линейных, так и нелинейных задач, стационарных и динамических, в контексте изучения теплофизических свойств и механических характеристик деформированных твердых тел и конструкционной механики. Это включает в себя решение задач, связанных с теплопередачей и теплообменом, в том числе и тех, что характеризуются временными изменениями, геометрическими и физическими нелинейностями элементов. Программа способна обрабатывать более восьми параметров, выбор которых зависит от конкретной поставленной задачи, в результате получаем во- первых решение уравнений в виде выражений, во- вторых табличные и графические значения теплофизических характеристик исследуемого стержня. Так же результаты сложных вычислений выводятся в виде текстового файла в Латекс – для удобного использования в публикациях.

Программа позволяет моделировать тепловые процессы в стержне, учитывая различные граничные условия (например, тепловой поток, температуру на границах), и визуализировать распределение температуры, деформаций и напряжений в стержне. Основная часть кода включает в себя определение параметров задачи, построение функционала энергии, дифференцирование для получения системы уравнений и решение этой системы для определения перемещений и температур в стержне. Результаты визуализируются в виде графиков, демонстрирующих изменение соответствующих физических величин вдоль стержня.

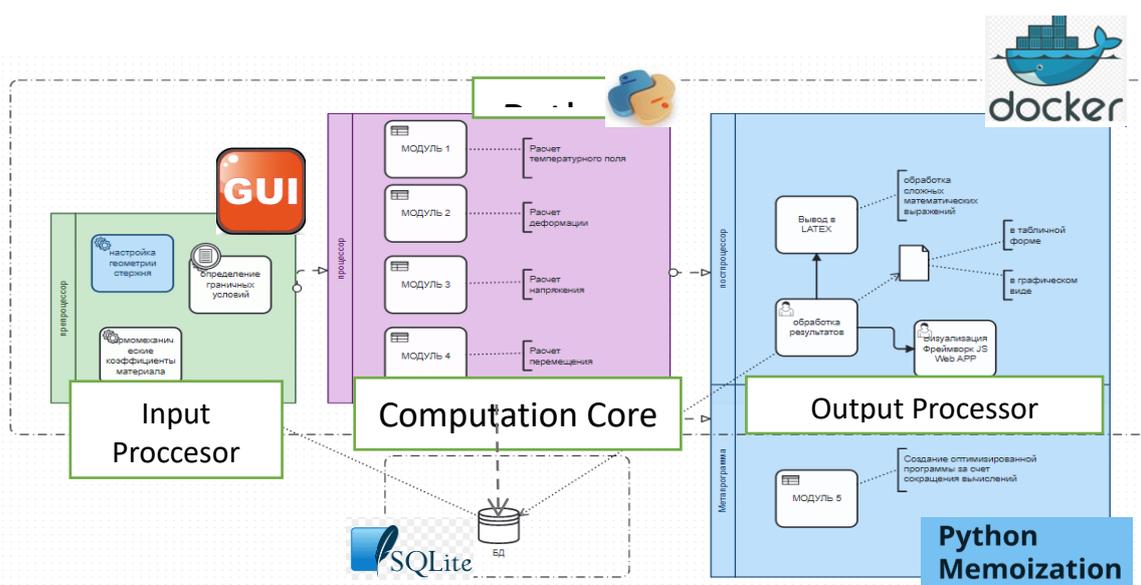


Рисунок 4.6 – Диаграмма компонентов

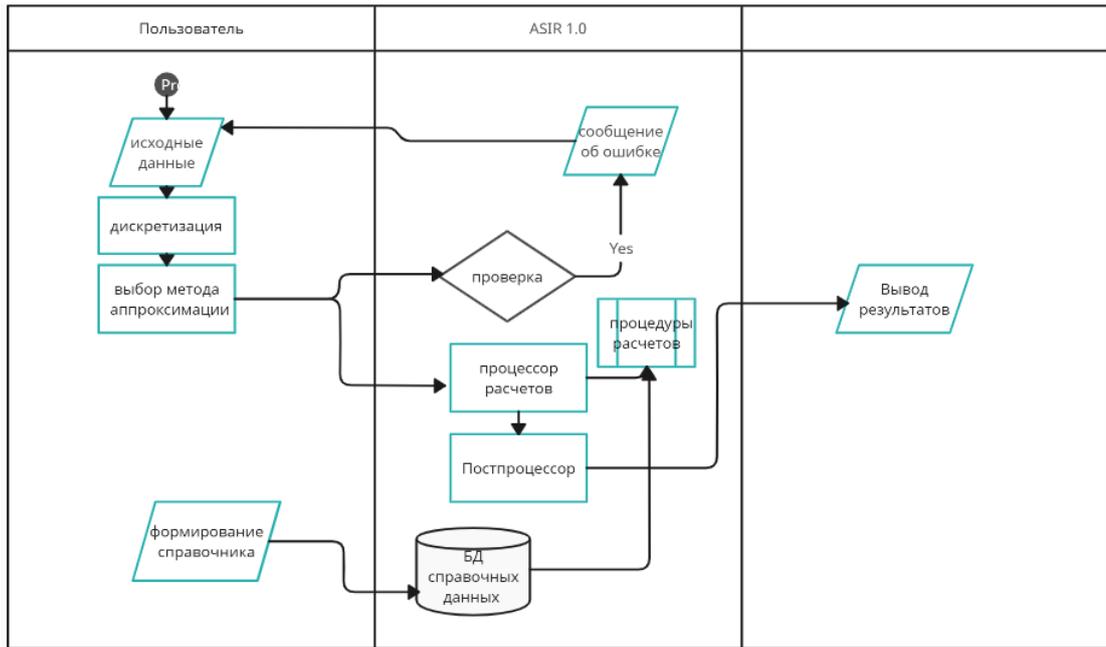


Рисунок 4.7 – Схема распределения состояний

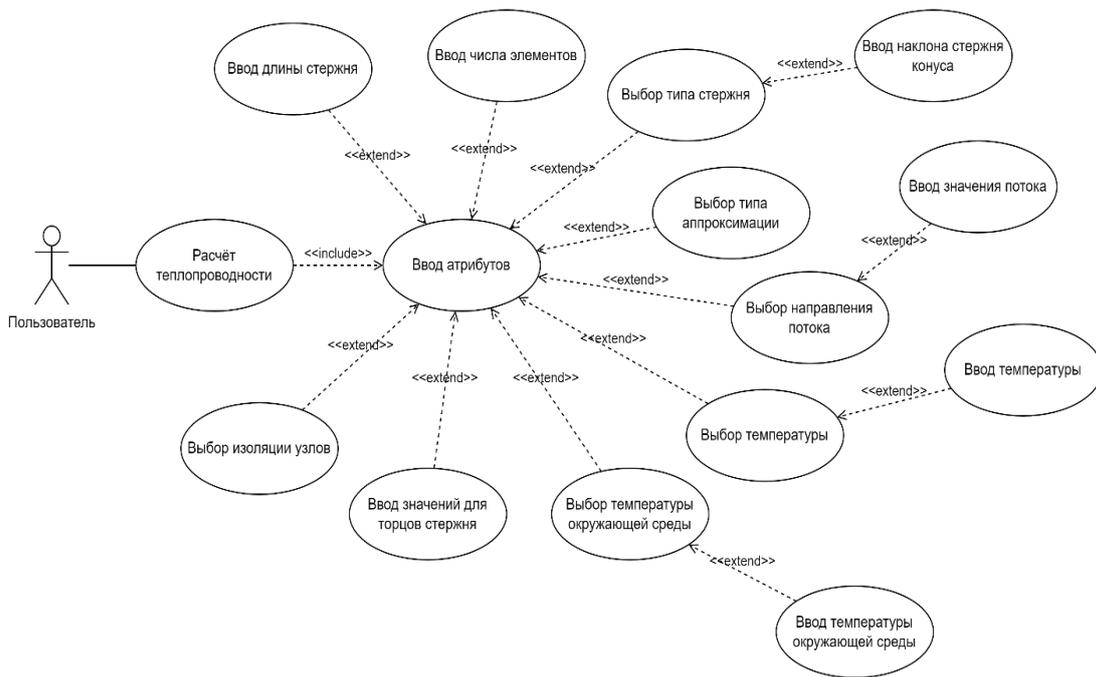


Рисунок 4.8 – диаграмма прецедентов

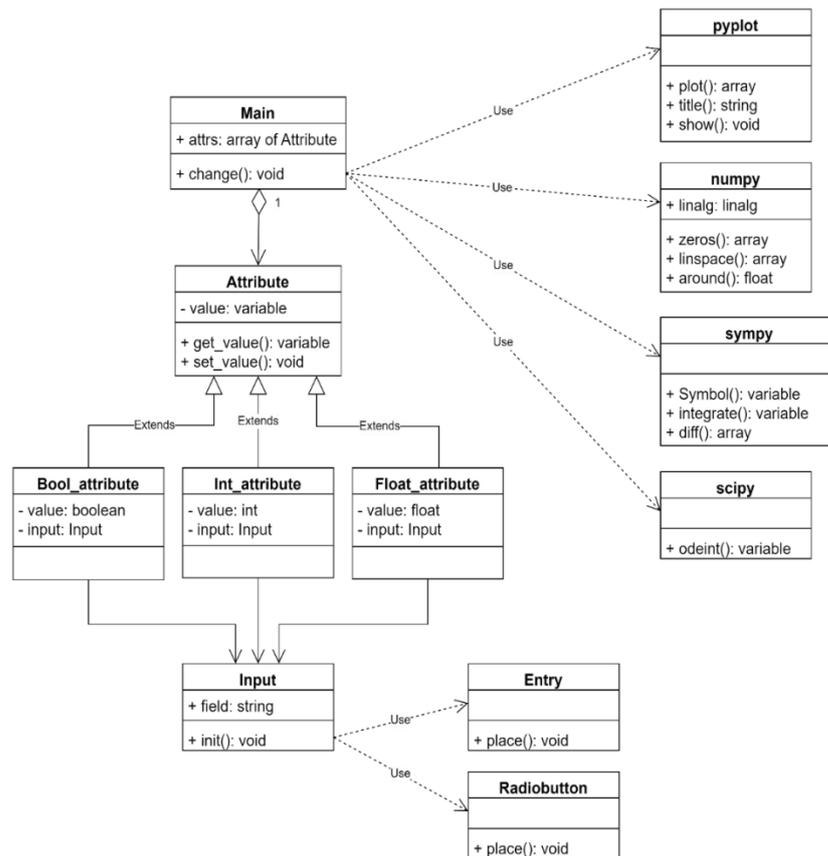


Рисунок 4.8 – Диаграмма классов

4.2.2 Разработка модулей программного обеспечения

Предлагаемая в соответствии с разработанной выше методикой программный комплекс для исследования теплофизических характеристик стержня переменного сечения, включает в себя 4 модуля (рисунок 4.9):

- 1) Модуль расчета температурного поля;
- 2) Модуль расчета перемещения;
- 3) Модуль расчета деформации;
- 4) Модуль расчета напряжения.

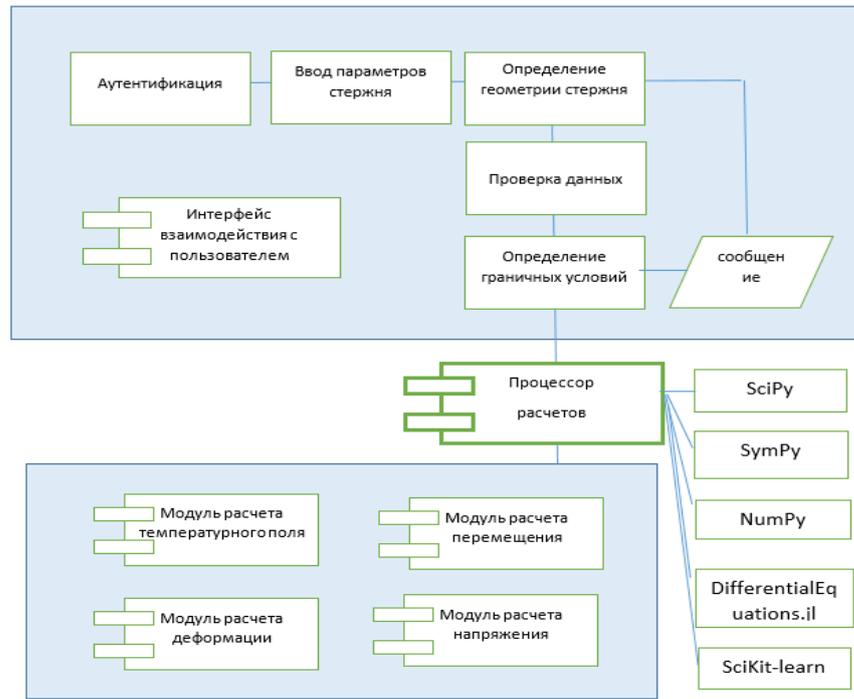


Рисунок 4.9 - Архитектура программный комплекс ASIR

Интерфейс программы, созданный с использованием библиотеки Tkinter для Python, предназначен для ввода параметров и визуализации результатов задачи теплопроводности в стержне с переменным сечением. Он включает в себя следующие элементы управления и их функции. Этот интерфейс обеспечивает удобный пользовательский ввод параметров задачи и наглядное отображение результатов, что делает программу доступной для использования даже теми, кто не имеет глубоких знаний в программировании или теплофизике.

Программный комплекс «ASIR» не требует предварительной установки. Загрузка и запуск программы может осуществляться непосредственно из каталога там, где находится программный комплекс ASIR предоставляемого носителя данных двойным нажатием левой кнопки мыши на имени исполняемого файла ASIR.exe.

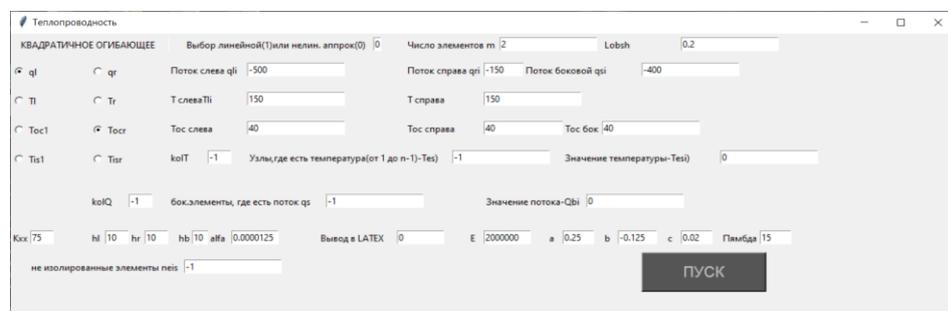


Рисунок 4.10 – Окно заставки программы «ASIR»

Для начала необходимо выбрать форму исследуемого стержня, это может быть стержень постоянного сечения или стержень переменного сечения, в виде конуса. Общая длина стержня и число дискретных элементов (Рисунок 4.11).

Рисунок 4.11 – Выбор геометрической формы стержня

Для указания поступающих потоков тепла или обмена тепла с окружающей средой, с начала необходимо выбрать на левой панели, после задается числовые значения этих величин. (Рисунок 4.12)

Рисунок 4.12 – Теплообмен

После задаются теплофизические коэффициенты стержня. (Рисунок 4.13.)

Рисунок 4.13 – Теплофизические характеристики стержня.

4.3 Результаты использования вариационного подхода для оценки термомеханических характеристик стержня переменного сечения

4.3.1 Если тепловой поток подается слева и стержень теплоизолирован получаем следующее решение задачи:

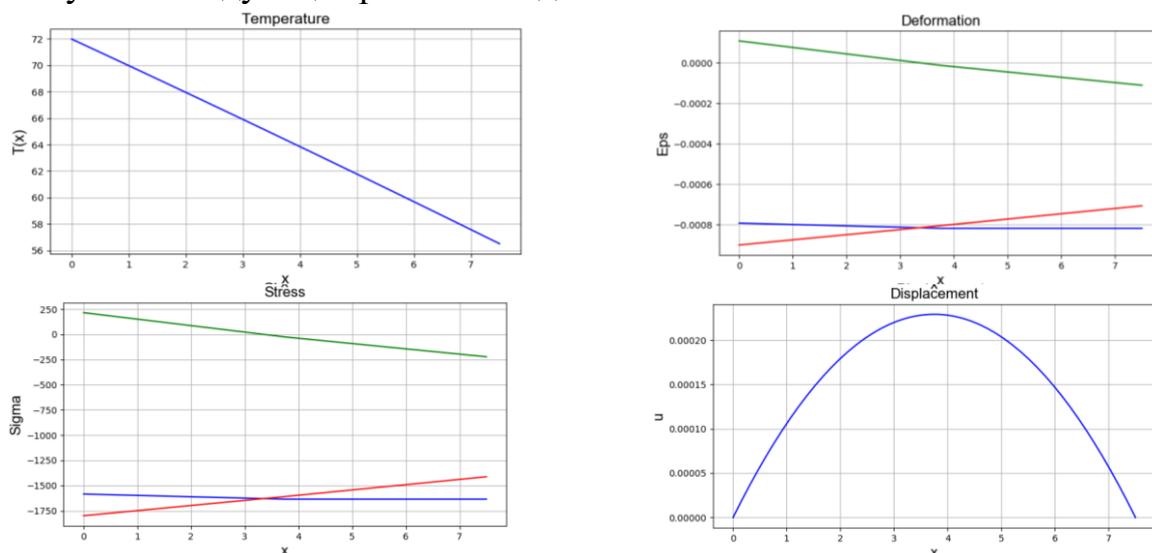


Рисунок 4.14 – графики термофизических характеристик стержня

4.3.2 Стержень нетеплоизолирован при тепловом потоке слева для двух элементов стержня

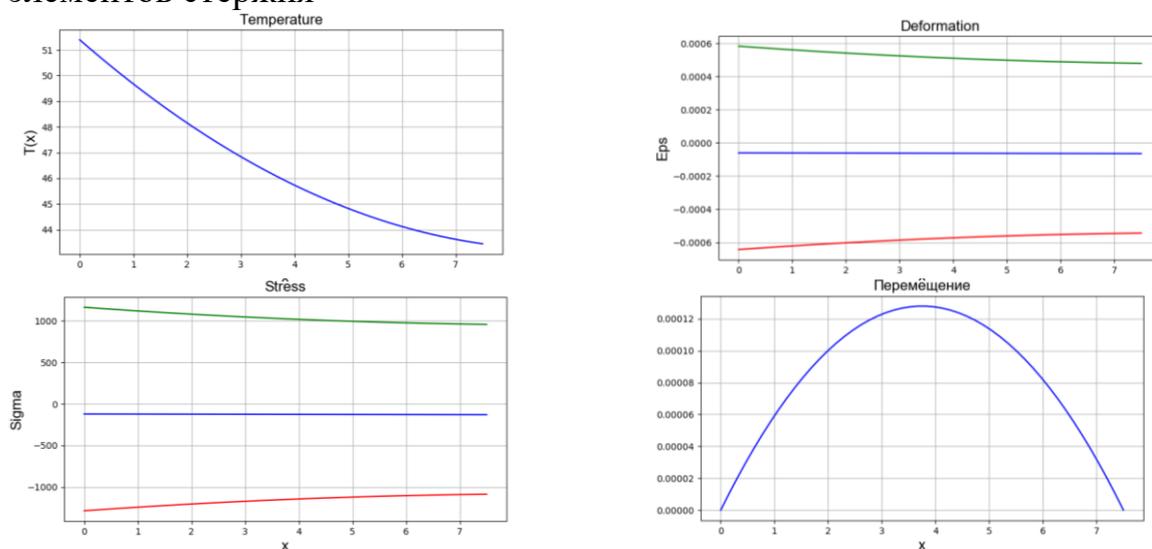


Рисунок 4.15– графики термофизических характеристик стержня

4.4 Практическое применение метода оценки термомеханических характеристик стержней переменного сечения при решении конкретных задач в случае квадратичной аппроксимации

4.4.1 Тепловой поток слева и стержень теплоизолирован при тепловом потоке слева для одного элемента

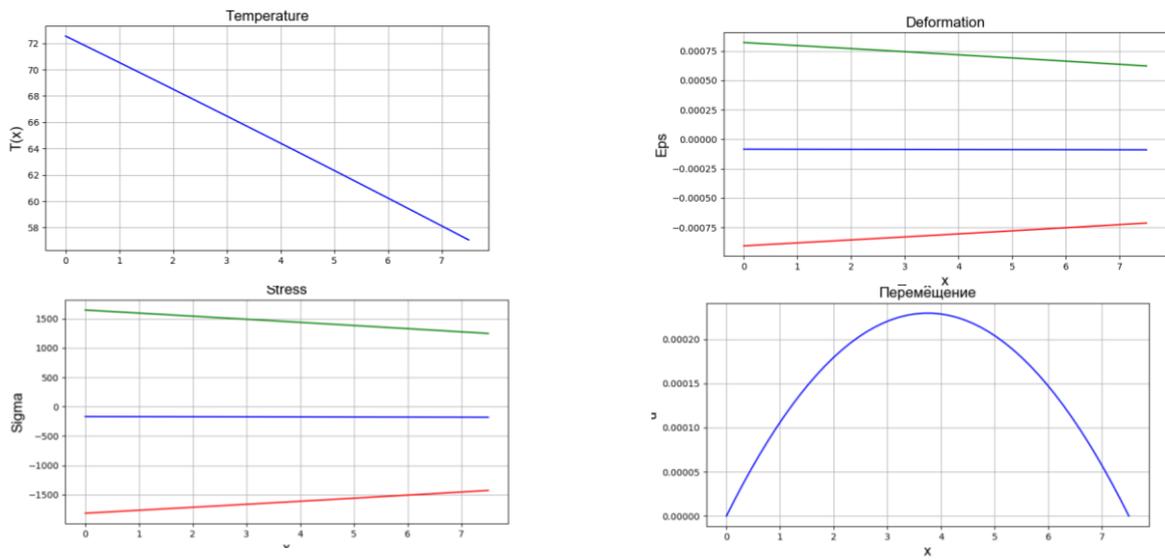


Рисунок 4.16– графики термофизических характеристик стержня

4.4.2 Стержень нетеплоизолирован при тепловом потоке слева для одного элемента

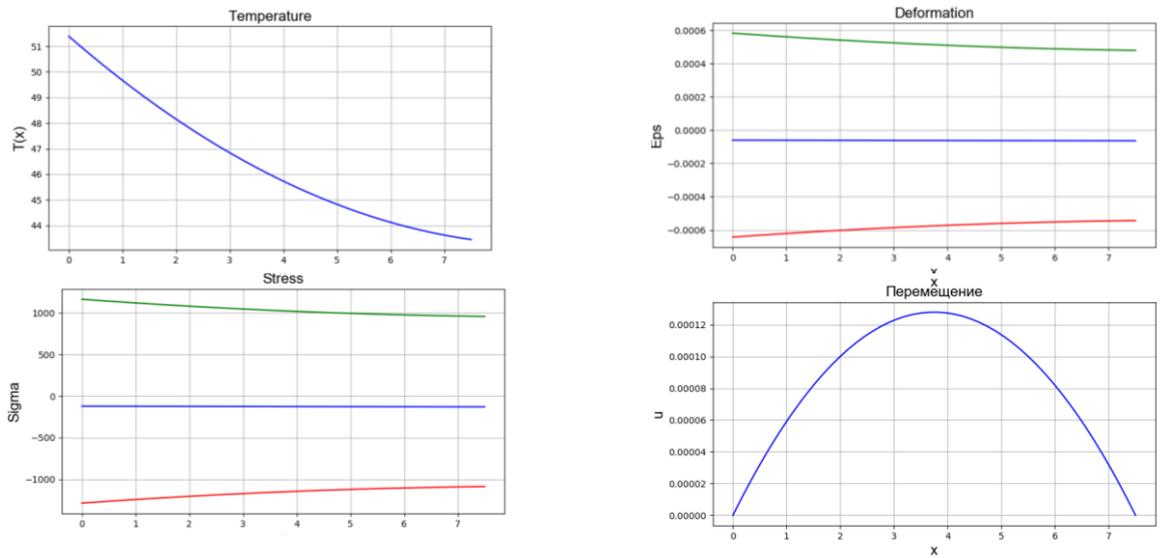


Рисунок 4.17 – графики термофизических характеристик стержня

4.4.3 Температура слева и стержень теплоизолирован при температуре слева для одного элемента

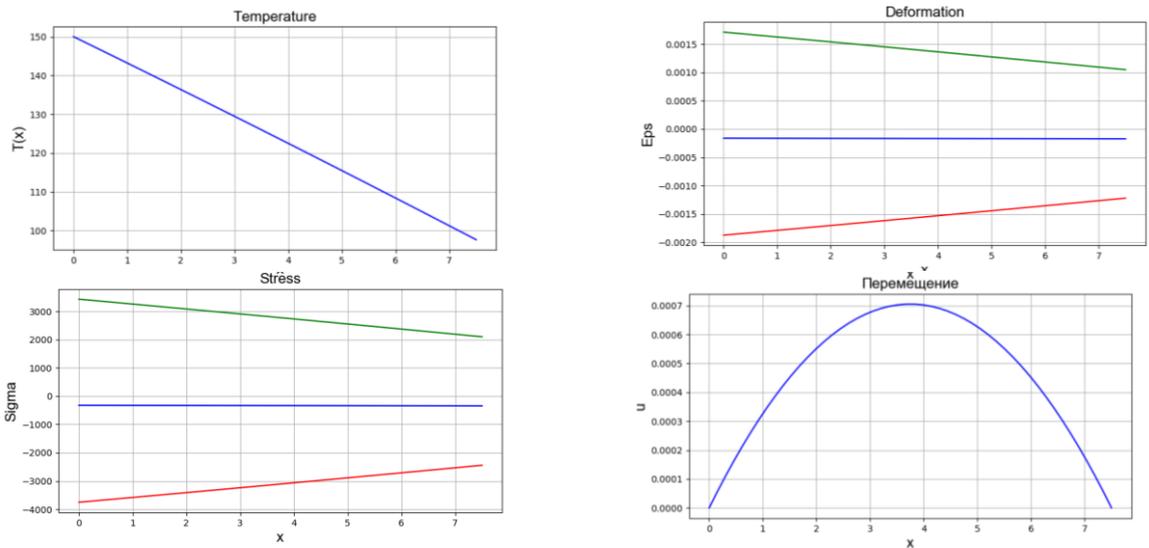


Рисунок 4.18 – графики термофизических характеристик стержня

4.4.4 Стержень нетеплоизолирован при температуре слева для одного элемента

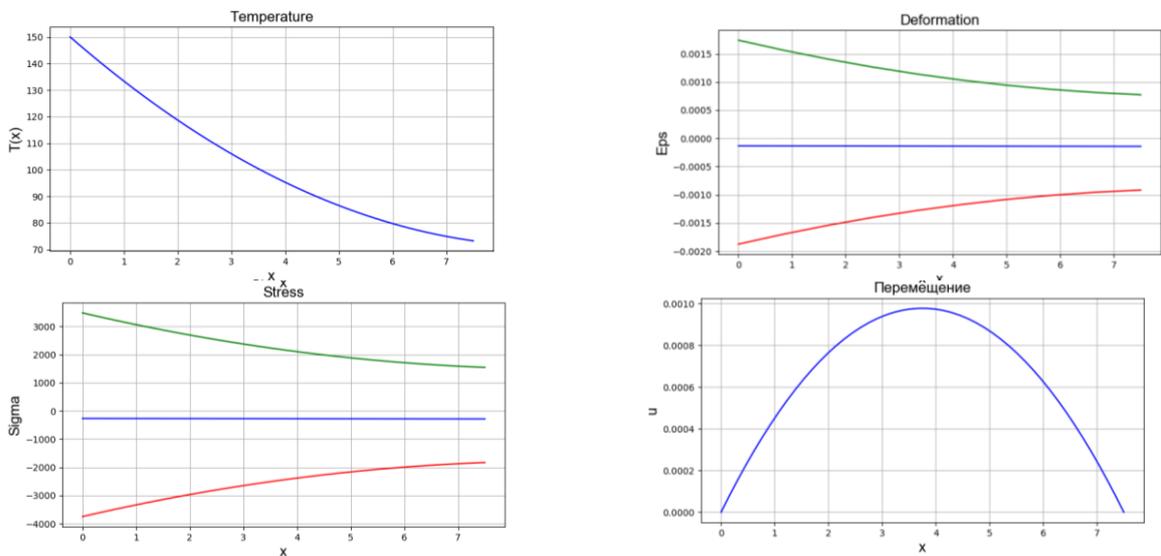


Рисунок 4.19 – графики термофизических характеристик стержня

4.5 Сравнительный анализ численного и аналитического методов решений задачи распределения температуры по длине стержня переменного сечения.

Пусть имеется конус (рисунок 4.20) длиной L и радиусом поперечного сечения r , не изолированный, с коэффициентом теплопроводности k ,

температура окружающей среды со стороны боковой поверхности T_{ocb} и с правого торца T_{oc} , с левого торца поступает тепловой поток q , h и h_1 коэффициенты теплоотдачи для правого торца и боковой поверхности стержня, соответственно. Образующий стержня представляет собой конус с наклоном, заданным уравнением $y=ax+b$.

Необходимо определить закон распределения температуры по длине стержня.

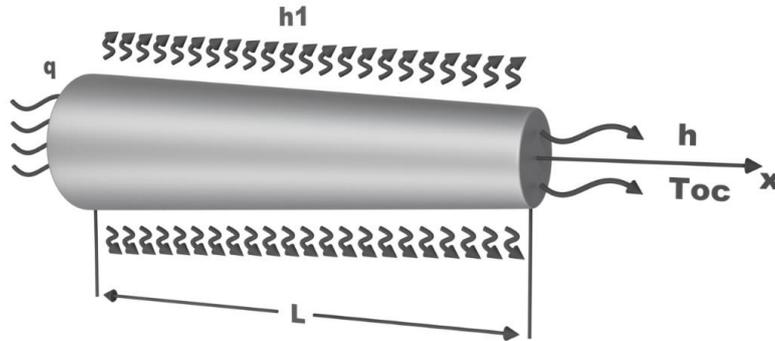


Рисунок 4.20 - Расчетная схема

Методы решения

Решения задачи с использованием квадратичной аппроксимации

Для решения этой задачи воспользуемся вариационным принципом Эйлера. Для этого минимизируем функционал, который в общем случае имеет вид :

$$J = \int_0^L \left[\frac{sk}{2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 - sQT + s\lambda \frac{dT}{dt} T + \frac{s}{r} h_o (T - T_{ocb})^2 + qTs / L + \frac{s}{2L} h (T - T_{oc})^2 \right] dx.$$

Функционал имеет следующий вид:

$$J = \int_0^L \left[\frac{\pi(ax+b)^2 k}{2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 + qTs_l + \frac{s_r}{2} h (T - T_{oc})^2 + \pi(ax+b) h_o (T - T_{ocb})^2 \right] dx, \quad (4.1)$$

где s_l и s_r – площади поперечных сечений левого и правого торца стержня.

Преобразив функционал можно написать в виде:

$$J = \int_0^L [F(x) dx] dx + qT_0 s_l + \frac{s_r}{2} h (T_n - T_{oc})^2, \quad (4.2)$$

где T_0 - температура на левом и T_n - температура на правом торце стержня, также:

$$F(x) = \frac{\pi(ax+b)^2 k}{2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 + \pi(ax+b) h_o (T - T_{ocb})^2.$$

Для решения задачи методом конечных элементов разобьем стержень длиной L на m элементов с n узлами ($n=2m+1$). Тогда длина каждого элемента стержня будет равна $l=L/m$. Возьмем некоторый элемент с температурами на концах T_i и T_{i+2} , а в середине T_{i+1} . Применим квадратичную аппроксимацию для функции температуры:

$$T = \left(\frac{2x^2 - 3lx + l^2}{l^2} \right) T_i + \left(\frac{4lx - 4x^2}{l^2} \right) T_{i+1} + \left(\frac{2x^2 - lx}{l^2} \right) T_{i+2}.$$

Подставляя ее в функционал имеем

$$J = \int_0^L [F(x) dx] dx + qT_0 s_l + \frac{s_r}{2} h(T_n - T_{oc})^2. \quad (4.3)$$

Здесь подынтегральная функция имеет вид

$$F(x) = \pi k \sum_{i=0}^m (ax + b_i)^2 \frac{[(-3l + 4x)T_{2i} + (4l - 8x)T_{2i+1} + (-l + 4x)T_{2i+2}]}{2l^2} + \\ + \pi hb \sum_{i=0}^m \left[-T_{oc} l + \frac{(l^2 - 3lx + 2x^2)T_{2i} + (4lx - 4x^2)T_{2i+1} + (-lx + 2x^2)T_{2i+2}}{l^2} \right] (ax + b_i).$$

После постановки $F(x)$ в (3.77) дифференцируя J по T_i $i = \overline{0, n}$ приравнявая к нулю, получим следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} + a_{31} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{pmatrix},$$

$$\text{где } a_{00} = \pi \left[k \left(\frac{a^2 L}{5} + ab_0 + \frac{7b_0^2}{3L} \right) + \frac{h_b L}{15} \left(\frac{La}{2} + 4b_0 \right) \right];$$

$$a_{01} = \pi \left[k \left(-\frac{2a^2 L}{5} - \frac{4ab_0}{3} - \frac{8b_0^2}{3L} \right) + \frac{2h_b b_0 L}{15} \right];$$

$$a_{02} = \pi \left[k \left(\frac{a^2 L}{5} + \frac{ab_0}{3} + \frac{b_0^2}{3L} \right) - \frac{h_b L}{15} \left(\frac{La}{2} + b_0 \right) \right];$$

$$a_{10} = \pi \left[k \left(-\frac{2a^2 L}{5} - \frac{4ab_0}{3} - \frac{8b_0^2}{3L} \right) + \frac{2h_b b_0 L}{15} \right];$$

$$a_{11} = \pi \left[k \left(\frac{32a^2 L}{15} + \frac{16ab_0}{3} + \frac{16b_0^2}{3L} \right) + \frac{h_b L}{15} (8La + 16b_0) \right];$$

$$a_{12} = \pi \left[k \left(-\frac{26a^2 L}{15} - 4ab_0 - \frac{8b_0^2}{3L} \right) + \frac{h_b L}{15} (2La + 2b_0) \right];$$

$$a_{20} = a_{02}; \quad a_{21} = a_{12};$$

$$a_{22} = \pi \left[k \left(\frac{26a^2 L}{15} + \frac{11ab_0}{3} + 4ab_0 + \frac{7(b_0^2 + b_1^2)}{3L} \right) + \frac{h_b L}{15} (4La + 4(b_0 + b_1)) \right];$$

$$a_{23} = \pi \left[k \left(-\frac{2a^2 L}{5} - \frac{4ab_1}{3} - \frac{8b_1^2}{3L} \right) + \frac{2h_b b_1 L}{15} \right];$$

$$a_{24} = \pi \left[k \left(\frac{a^2 L}{5} + \frac{4ab_1}{3} + \frac{3b_1^2}{3L} \right) - \frac{h_b L}{15} \left(\frac{La}{2} + b_1 \right) \right];$$

$$a_{32} = a_{23};$$

$$a_{33} = \pi \left[k \left(\frac{32a^2L}{15} + \frac{16ab_1}{3} + \frac{16b_1^2}{3L} \right) + \frac{8h_bL}{15} (La + 2b_1) \right];$$

$$a_{34} = \pi \left[k \left(-\frac{26a^2L}{15} - 4ab_1 - \frac{8b_1^2}{3L} \right) + \frac{h_bL}{15} (2La + 2b_1) \right];$$

$$a_{42} = a_{24}; \quad a_{43} = a_{34};$$

$$a_{44} = \pi \left[k \left(\frac{23a^2L}{15} + \frac{11ab_0}{3} + 4ab_0 + \frac{7b_1^2}{3L} \right) + \frac{7h_bLa}{30} + \frac{4h_bLb_1}{15} + h_b b_2^2 \right];$$

$$B_0 = L^2 \pi T_{oc1} a h_b + 2L \pi T_{oc1} b_0 h_b - \pi b_0^2 qL - (-2 L^3 \pi T_{oc1} a h_b + 6 L^2 \pi T_{oc1} b_0 h_b) / (2L) - (12 L^3 \pi T_{oc1} a h_b - 8 L^2 \pi T_{oc1} b_0 h_b) / (6 L);$$

$$B_1 = -2 L^2 \pi a h_b T_{oc1} + 4L \pi b_0 h_b T_{oc1} - (-16 L^3 \pi a h_b T_{oc1} + 16 L^2 \pi b_0 * h_b T_{oc1}) / 6 L$$

$$B_2 = 2L^2 \pi a h_b T_{oc1} + 2L \pi b_1 * h_b T_{oc1} - (-2L^3 \pi a h_b T_{oc1} + 2L^2 \pi b_0 * h_b T_{oc1} + 6L^2 \pi b_1 * h_b T_{oc1}) / 2L - (16L^3 \pi a h_b T_{oc1} - 8L^2 \pi b_0 * h_b T_{oc1} - 8L^2 \pi b_1 h_b T_{oc1}) / 6L$$

$$B_3 = -2L^2 \pi a h_b T_{oc1} + 4L \pi b_1 h_b T_{oc1} - (-16 L^3 \pi a h_b T_{oc1} + 16 L^2 \pi b_1 h_b T_{oc1}) / 6 L$$

$$B_4 = L^2 \pi a h_b T_{oc1} - L \pi b_1 h_b T_{oc1} + \pi b_2^2 h_r T_{oc1} - (4 L^3 \pi a h_b T_{oc1} - 8 L^2 \pi b_1 h_b T_{oc1}) / 6 L.$$

Аналитический метод решения задачи

Для получения уравнения теплопроводности воспользуемся вариационным принципом Эйлера, то есть минимизируем функционал (4.1):

$$J = \int_0^L \left[\frac{sk}{2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 - sQT + s\lambda \frac{dT}{dt} T + \frac{s}{r} h_o (T - T_{oc\bar{o}})^2 + qTs + \frac{s}{2} h (T - T_{oc})^2 \right] dx.$$

Для нашего случая он имеет вид:

$$J = \int_0^L \left[\frac{s_r k}{2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 + qTs_r + \frac{s_r}{2} h (T - T_{oc})^2 + \pi (ax + b) h_o (T - T_{oc\bar{o}})^2 \right] dx$$

или

$$J = \int_0^L \left[\frac{(ax + b)^2 k}{2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 + qTb^2 + \frac{b^2}{2} h (T - T_{oc})^2 + (ax + b) h_o (T - T_{oc\bar{o}})^2 \right] dx$$

Обозначим $F = \frac{(ax + b)k}{2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 + qTb^2 + \frac{b^2}{2} h (T - T_{oc})^2 + (ax + b) h_o (T - T_{oc\bar{o}})^2$

Для минимума функционала по Эйлеру необходимо:

$$\frac{dF}{dT} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dF}{dT'_x} \right) = 0, \quad \frac{dF}{dT'_x} \Big|_a^b = 0.$$

$$\frac{dF}{dT} = 2(ax + b) h_o (T - T_{oc\bar{o}}).$$

$$\frac{dF}{dT'_x} = (ax + b)^2 k \frac{dT}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dF}{dT'_x} \right) = 2a(ax + b)k \frac{dT}{dx} + (ax + b)^2 k \frac{d^2T}{dx^2}$$

$$\frac{dF}{dT} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dF}{dT_x} \right) = 2(ax+b)h_0(T-T_{oc0}) - 2a(ax+b)k \frac{dT}{dx} - (ax+b)^2 k \frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

$$(ax+b)^2 k \frac{d^2T}{dx^2} + 2a(ax+b)k \frac{dT}{dx} - 2(ax+b)h(T-T_{oc}) = 0$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} + 2a/(ax+b) \frac{dT}{dx} - 2h(T-T_{oc})/(ax+b)k = 0$$

или обозначая $\hat{T} = T - T_{oc}$ получим

$$\frac{d^2\hat{T}}{dx^2} + 2a/(ax+b) \frac{d\hat{T}}{dx} - 2h\hat{T}/(ax+b)k = 0$$

При $a=-0.1$, $b=4$, $h=10$ и $k=100$ имеем:

$$\frac{d^2\hat{T}}{dx^2} - 0.2/(-0.1x+4) \frac{d\hat{T}}{dx} - 0.2\hat{T}/(-0.1x+4) = 0$$

Решение :

$$T(x) = \frac{k_1 c_1 I_1(k_2 \sqrt{40-x})}{\sqrt{40-x}} - \frac{k_1 c_1 K_{-1}(k_2 \sqrt{40-x})}{\sqrt{40-x}}, \text{ где } k_1 = 1.41421, k_2 = 2.82843, \quad (4.4)$$

где $I_1(x)$ и $K_{-1}(x)$ - функций Бесселя первого рода 1 порядка и -1 порядка (4.4).

Постоянные C_1 и C_2 находим из ограничений

$$k \frac{dT}{dx} \Big|_0 - q = 0,$$

$$-k \frac{dT}{dx} \Big|^L + h(T - T_{oc}) \Big|^L = 0.$$

Находим производную $T(x)$:

$$T'(x) = \left[\frac{k_1 I_1(k_2 \sqrt{40-x})}{2\sqrt{(40-x)^3}} - \frac{k_1 k_2 I_1(k_2 \sqrt{40-x})}{2(40-x)} \right] c_1 - \left[\frac{k_1 K_{-1}(k_2 \sqrt{40-x})}{2\sqrt{(40-x)^3}} - \frac{k_1 k_2 K_{-1}(k_2 \sqrt{40-x})}{2(40-x)} \right] c_2.$$

Тогда

$$T'(0) = \left[\frac{k_1 I_1(k_2 \sqrt{40})}{2\sqrt{(40)^3}} - \frac{k_1 k_2 I_1(k_2 \sqrt{40})}{80} \right] c_1 - \left[\frac{k_1 K_{-1}(k_2 \sqrt{40})}{2\sqrt{(40)^3}} - \frac{k_1 k_2 K_{-1}(k_2 \sqrt{40})}{80} \right] c_2 = A c_1 - B c_2. \quad (4.5)$$

$$T'(L) = \left[\frac{k_1 I_1(k_2 \sqrt{40-L})}{2\sqrt{(40-L)^3}} - \frac{k_1 k_2 I_1(k_2 \sqrt{40-L})}{2(40-L)} \right] c_1 - \left[\frac{k_1 K_{-1}(k_2 \sqrt{40-L})}{2\sqrt{(40-L)^3}} - \frac{k_1 k_2 K_{-1}(k_2 \sqrt{40-L})}{2(40-L)} \right] c_2 = C c_1 - D c_2. \quad (4.6)$$

$$T(L) = T(x) = \frac{k_1 c_1 I_1(k_2 \sqrt{40-L})}{\sqrt{40-L}} - \frac{k_1 c_1 K_{-1}(k_2 \sqrt{40-L})}{\sqrt{40-L}} = E c_1 + F c_2. \quad (4.7)$$

Из первого ограничения:

$$T'(0) = \frac{q}{k}$$

или подставляя (4.5) имеем:

$$Cc_1 - Dc_2 = \frac{q}{k}. \quad (4.8)$$

Из второго ограничения

$$T'(L) = \frac{h}{k} T(L).$$

Поставляя значения $T'(L)$ и $T(L)$ из (4.3) и (4.2) имеем:

$$\left(C - \frac{hE}{K}\right)c_1 - \left(D + \frac{hE}{K}\right)c_2 = 0 \text{ или } Gc_1 = Kc_2. \quad (4.9)$$

Здесь введены обозначения $G = C - \frac{hE}{K}$ и $K = D + \frac{hE}{K}$ имеем:

$$Vc_1 - Wc_2 = 0.$$

Из (4.8) и (4.9) получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} Cc_1 - Dc_2 = \frac{q}{k}, \\ Gc_1 - Kc_2 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно c_1 и c_2 получим:

$$c_2 = \left(\frac{hq}{K}\right) / \left(B - \frac{AK}{G}\right), \quad c_1 = \frac{Kc_2}{G}.$$

Подставляя значения c_1 и c_2 получим решение

$$T(x) = \left[\frac{k_1 I_1 K (k_2 \sqrt{40-x})}{G \sqrt{40-x}} - \frac{k_1 c_1 K_{-1} (k_2 \sqrt{40-x})}{\sqrt{40-x}} \right] \left(\frac{hq}{K}\right) / \left(B - \frac{AK}{G}\right).$$

Практические результаты

Для получения численных результатов был взяты следующие исходные данные:

L	r	T_{oc1}	T_{oc}	q	k	E	α	h	h_0
20 см	1 см	40 °C	40 °C	-600	100	$2 \cdot 10^6 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$	$0,0000125 \frac{1}{^\circ\text{C}}$	10	10
				$\frac{\text{Ватт}}{\text{см}^2}$	$\frac{\text{Ватт}}{\text{см} \cdot ^\circ\text{C}}$				

Образующая функция стержня: $y = ax + b = -0.1x + 4$.

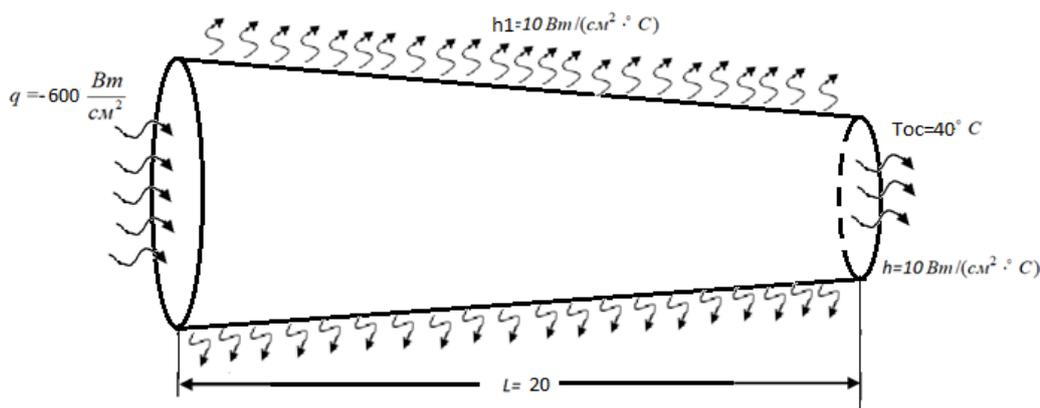


Рисунок 4.21- Расчетная схема с исходными данными.

Результаты вычисления следующие:

1. КВАДРАТИЧНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

#1 интервал Температура

T1 = [67.92855, 42.029766, 43.049477]

#2 интервала Температура

T2 = [69.068985, 49.928986, 43.50344, 41.026497, 40.44771]

#3 интервала Температура

T3 = [69.20674, 54.493587, 47.0812, 43.297554, 41.51776, 40.67564, 40.373993]

#4 интервала Температура

T4 = [69.23517, 57.355713, 50.1775, 45.841362, 43.306587, 41.825996, 41.002014, 40.556072, 40.364388]

#5 интервалов Температура

T5 = [69.243614, 59.300953, 52.62903, 48.16267, 45.22441, 43.296844, 42.059654, 41.270233, 40.78

4866, 40.498936, 40.36207]

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

T1 = [69.504376630105682, 43.437815854236263, 40.501351299789739]

T2 = [69.504376630105682, 50.824597262032803, 43.437815854236263, 40.844357649803541, 40.501351299789739]

T3 = [69.504376630105682, 55.270384039588436, 47.558838457810936, 43.437815854236263, 41.370759023514708, 40.56444046836684, 40.501351299789739]

T4 = [69.504376630105682, 58.06019091538154, 50.824597262032803, 46.270006877712369, 43.437815854236263, 41.746126152703411, 40.844357649803541, 40.498277038170684, 40.501351299789739]

T5 = [69.504376630105682, 59.950758928780942, 53.326760903953698, 48.74512634530457, 45.588792023303569, 43.437815854236263, 42.012380680912081, 41.126708108557914, 40.650654976243196, 40.477835619354991, 40.501351299789739]

Эти результаты решения задач при задании одного до пяти элементов стержня представлены в таблице 4.1.

Таблица 4.1 - Численное и аналитическое решение для различных узлов

Решение для 1 элемента		Решение для 2 элементов		Решение для 3 элементов		Решение для 4 элементов		Решение для 5 элементов	
Численное	Аналитическое	Численное	Аналитическое	Численное	Аналитическое	Численное	Аналитическое	Численное	Аналитическое
67.93	69.50	69.07	69.50	69.21	69.5	69.24	69.5	69.24	69.5
42.03	43.44	49.93	50.82	54.49	55.27	57.36	58.06	59.3	59.95
43.05	40.5	43.50	43.44	47.08	47.56	50.18	50.82	52.63	53.33
		41.03	40.84	43.30	43.44	45.84	46.27	48.16	48.75
		40.45	40.5	41.52	41.37	43.31	43.43	45.22	45.59
				40.67	40.56	41.83	41.75	43.3	43.44
				40.37	40.5	41	40.84	42.06	42.01
						40.56	40.49	41.27	41.13
						40.36	40.5	40.78	40.65
								40.5	40.47
								40.36	40.5

Сравнительные графики полей распределения температур, полученные квадратичной аппроксимацией и аналитическим способом от одного до пяти элементов показаны на рисунке - 4.22

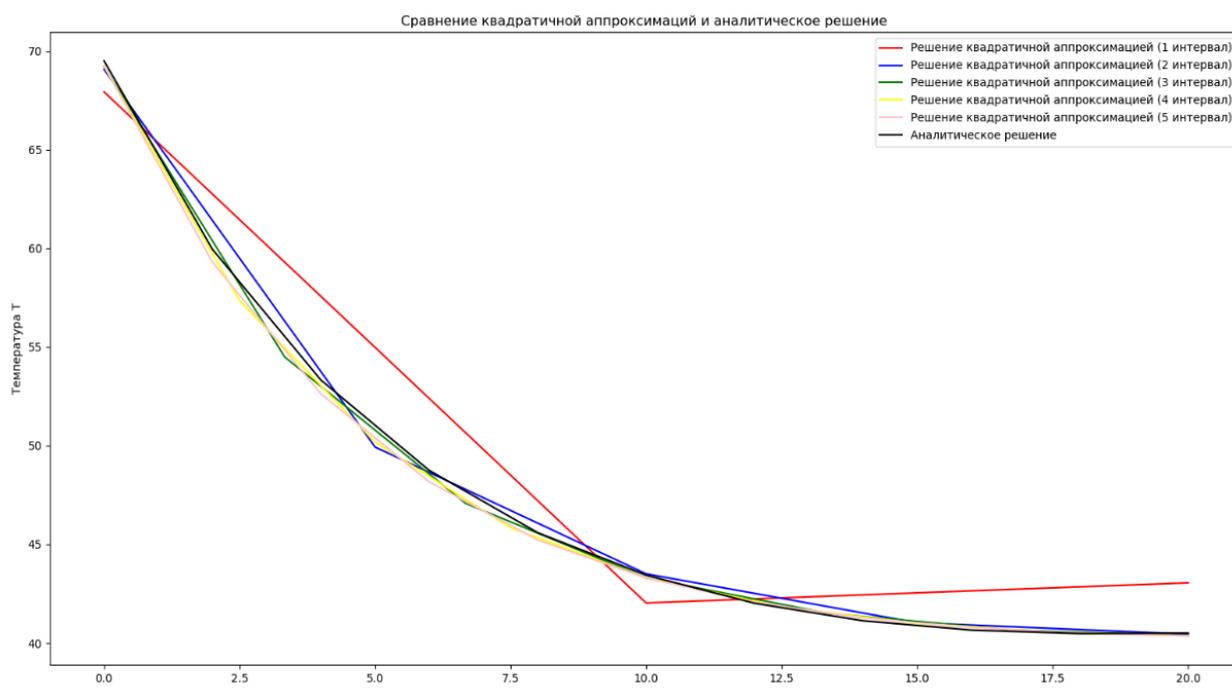


Рисунок 4.22 - Законы распределения температур, полученные аналитическим способом и квадратичной аппроксимацией, от одного до пяти элементов.

На рисунке демонстрируются графики распределения температур, полученные с использованием квадратичной аппроксимации и аналитического метода. Сравнение проводится для разного числа элементов — от одного до пяти. Этот рисунок важен для визуальной оценки согласованности результатов

между двумя подходами и позволяет оценить влияние количества элементов на точность аппроксимации.

Максимальные относительные ошибки для различного количества элементов показаны в таблице 4.2.

Таблица 4.2-Изменение относительной ошибки с увеличением числа узлов (относительная ошибка до 1%)

Delta, %	Число узлов										
	5	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Абсолютная ошибка	0,4459	0,3466	0,1746	0,1726	0,1686	0,1626	0,1566	0,153	0,147	0,1396	0,1355
Относительная ошибка	0,04	0,07	0,006	0,001	0,0009	0,0007	0,0005	0,0004	0,0001	0,00008	0,000076

В таблице 4.2 - представлены максимальные относительные ошибки, полученные при различном количестве элементов (узлов) в расчетной модели. Значения ошибок указаны как для абсолютной, так и для относительной ошибки, что позволяет оценить точность метода в зависимости от дискретизации объекта исследования. Таблица служит ключевым инструментом для анализа эффективности метода конечных элементов при решении задач теплопроводности.

Уменьшение относительной ошибки с увеличением числа элементов показано на рисунке 4.23.

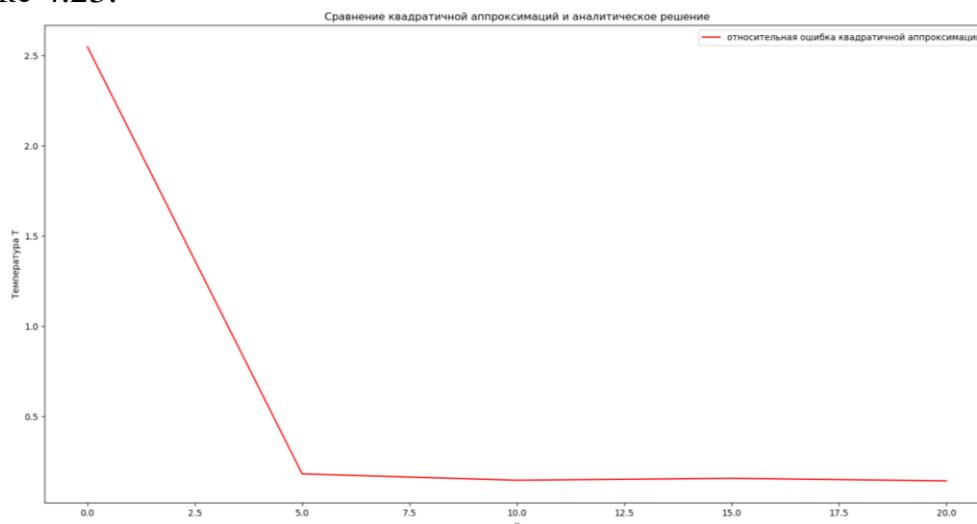


Рисунок 4.23 - Относительная ошибка квадратичной аппроксимации

На данном рисунке показано уменьшение относительной ошибки с увеличением числа элементов для квадратичной аппроксимации. Этот рисунок наглядно демонстрирует, как повышение количества элементов (узлов) влияет на точность решения, предоставляя визуальное подтверждение данных, представленных в таблице 4.2.

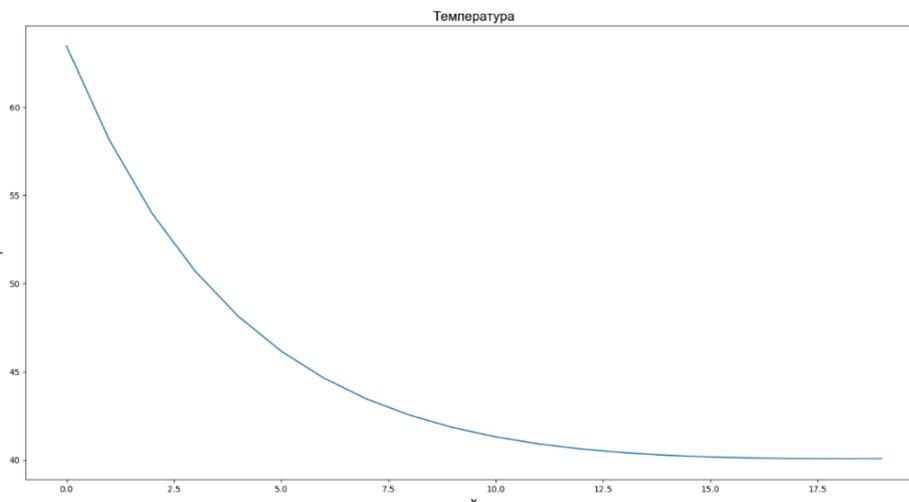


Рисунок 4.24 - Закон распределения температуры, полученный аналитическим методом

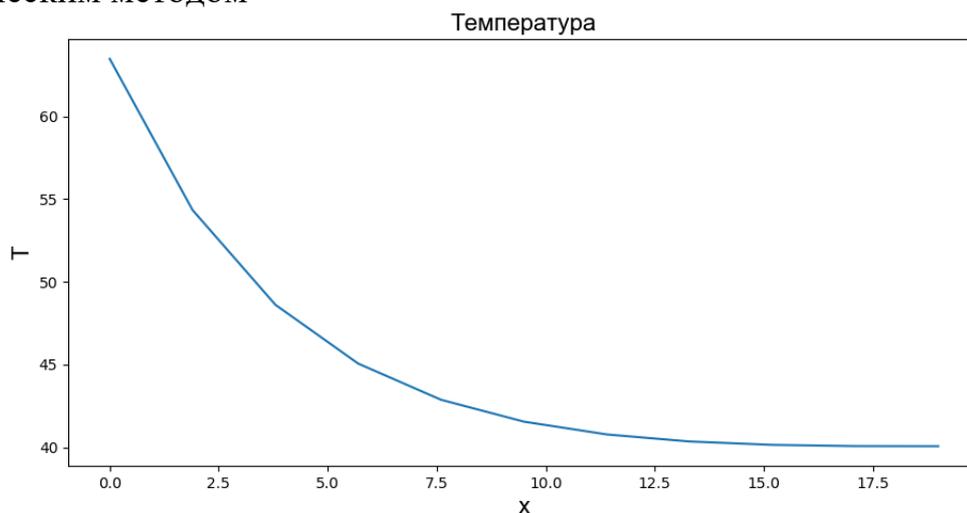


Рисунок 4.25 - Закон распределения температур, полученный квадратичной аппроксимацией

Иллюстрирует закон распределения температур, полученный с использованием квадратичной аппроксимации. Этот рисунок позволяет сравнить результаты, полученные квадратичной аппроксимацией, с аналитическим решением, представленным на рисунке 4.24, для оценки эффективности и точности обоих методов.

4.6 Сравнительный анализ точности и оценка сложности вариационного, аналитического и конечно-разностного методов решения.

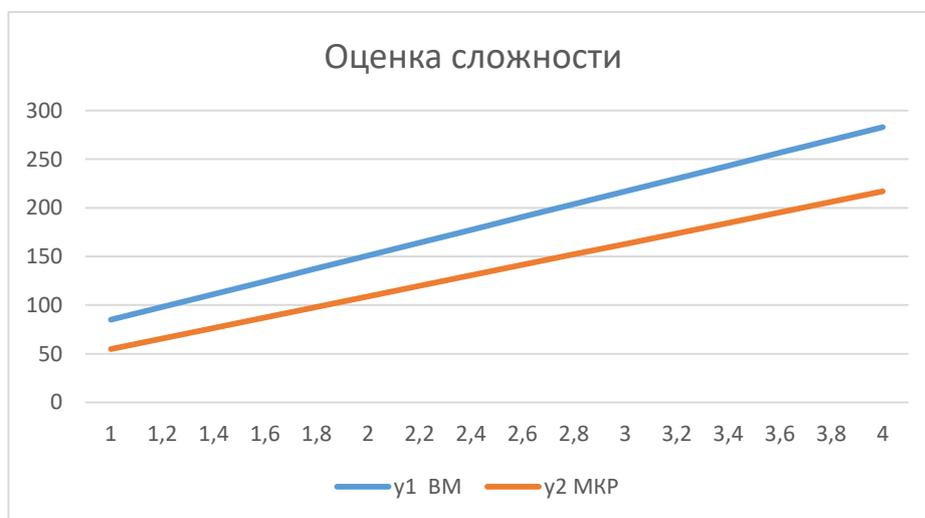


Рисунок 4.26 - сравнительный график оценки сложности вариационного метода и метода конечных разностей

Этот график демонстрирует, как точность решения задачи теплопроводности изменяется в зависимости от количества элементов m для двух разных методов. Важным выводом является то, что для достижения одинаковой точности, определенной как 0.01, вариационный метод требует меньшего количества элементов ($m=2$) по сравнению с методом конечных разностей ($m=4$). Это указывает на более высокую вычислительную эффективность вариационного подхода при решении прикладных задач.

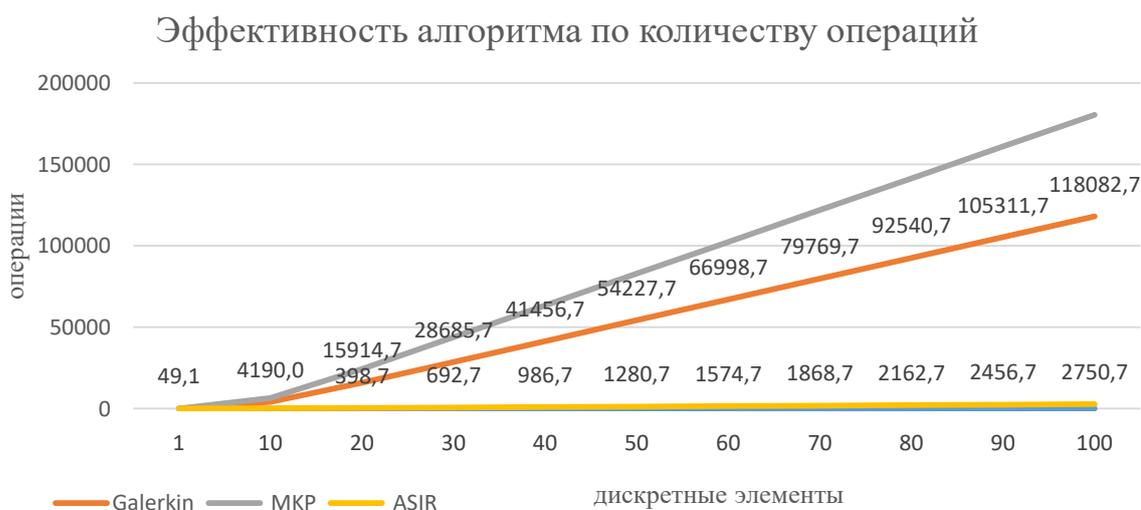


Рисунок 4.27 - Сравнительная эффективность алгоритма по количеству операций

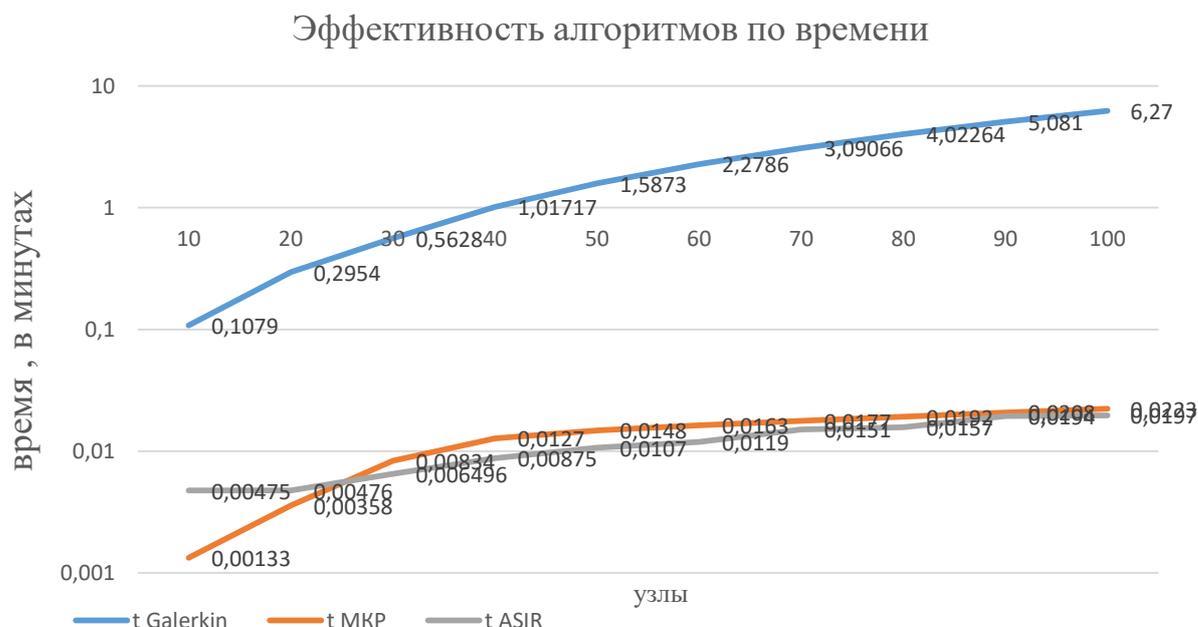


Рисунок 4.28 – Сравнительная эффективность по времени выполнения программ

Рисунок 4.28. показывает сравнительный анализ по времени выполнения программ, реализующих вариационный метод и метод конечных разностей. Время выполнения является критическим фактором при выборе метода для решения задачи, особенно в условиях ограниченных вычислительных ресурсов или при необходимости обработки большого объема данных. График дает представление о том, как метод ASIR и выбранное количество элементов m показывают оптимальное время выполнения.

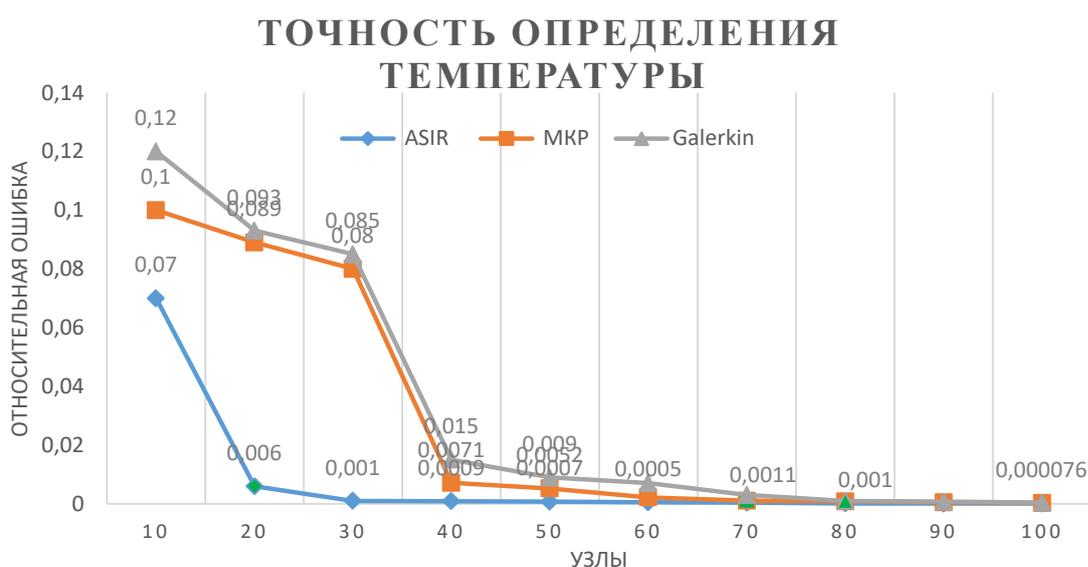


Рисунок 4.29 – Сравнительный анализ точности определения температуры разными методами

Выводы по четвертому разделу

Разработан программный комплекс ASIR на основе предложенных алгоритмов, созданных для задач оценки теплофизических характеристик в стержне переменного сечения. Определены преимущества компьютерного моделирования подготовленных алгоритмов, приведена архитектура созданного программного комплекса, принцип работы.

Важным аспектом является и то, что разработанные программные решения способны работать с моделями стержней сложной геометрии, что делает их применимыми к широкому спектру инженерных задач, от строительства и машиностроения до аэрокосмической промышленности.

Применяя традиционный вариационный принцип, разработанный Эйлером, было выведено уравнение теплопроводности для стержня с изменяющимся поперечным сечением. Используя функции Бесселя первого порядка и порядка минус один, были найдены решения данного уравнения теплопроводности. Следует отметить, что эти решения совпадают в узловых точках графика функции теплопроводности. Показаны относительные погрешности с увеличением числа узлов.

Сравнение показало, что вариационный метод, является важным этапом в разработке численных моделей, поскольку позволяют получить точные результаты численных решений. Таким образом, вариационный метод дает мощный инструментарий для решения широкого спектра задач в области теплофизики. Сравнительно показана эффективность алгоритмов методом конечных разностей, вариационным методом и оптимизированным алгоритмом, по количеству операций и по времени выполнения программ, в результате разработанный алгоритм и программный комплекс ASIR показывает лучший результат при разных значениях узлов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучение современного состояния исследований в области вычислительных алгоритмов и программ показало, что вариационные методы являются хорошим инструментом для решения задач теплофизики, обеспечивая высокую точность и глубину понимания процессов в стержнях.

Практическая реализация программы для моделирования теплофизических процессов в стержнях подтвердила, что интеграция современных вычислительных подходов в инженерные приложения способствует росту точности и надежности результатов, что важно для научно-технического прогресса.

Выводы:

1. разработан вариационный подход для исследования термомеханического состояния стержня переменного сечения;

2. разработаны методы и алгоритмы и программный комплекс для оценки термомеханических характеристик теплоизолированного и нетеплоизолированного стержня переменного сечения;

3. осуществлен сравнительный анализ точности определения температуры в узловых точках предложенного метода с аналитическим решением, МКР и методом Галеркина. Получен результат со следующими показателями, при $n=30$ точность метода достигает 0,001% и при $n=100$ соответственно 0,000076%.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Daniel Pantuso, Klaus-Jürgen Bathe, Pavel A. Bouzinov. A finite element procedure for the analysis of thermo-mechanical solids in contact. *Computers and Structures* 75 (2000) 551-573.
2. Biswajit Banerjee. *Basic Thermoelasticity* 15 (2006) 1-25.
3. Saoud. S. These de doctorat. Etude et Analyse Mathématique des Problèmes Non Linéaires Modélisant les États Thermiques d'un Superconducteur: Généralisation au Cas Tridimensionnel. December, 2009.
4. Griffith G., Tucker S., Milsom J., Stone G. Problems with Modern air-cooled Generation Stator Winding Insulation, Rep. 0883-7554, *El. Ins. Mag.*, 2000.
5. M.D. Greenberg. *Foundations of Applied Mathematics*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1978.
6. M.E. Gurtin. *An Introduction to Continuum Mechanics*. Academic Press, New York, 1981.
7. G.A. Maugin. *The Thermomechanics of Nonlinear Irreversible Behaviors: An Introduction*. World Scientific, Singapore, 1999.
8. T. Belytschko, W. K. Liu, and B. Moran. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. John Wiley and Sons, Ltd., New York, 2000.
9. T.W. Wright. *The Physics and Mathematics of Adiabatic Shear Bands*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2002.
10. R.C. Batra. *Elements of Continuum Mechanics*. AIAA, Reston, VA., 2006.
11. Zh.M Tashenova, E.N Nurlybaeva, A.K. Kudaiykulov. Method of Solution and Computational Algorithm for Mixed Thermo-Mechanics Problem. *World Applied Sciences Journal* 22 (Special Issue on Techniques and Technologies): 49-57, 2013. ISSN 1818-4952.
12. Huebner, K.H., 1975. *The Finite Element Method for Engineers*. Wiley, pp: 183-187.
13. Lishirong Yangjingning, 1999. Accurate model of post buckling of elastic rod with Mirabel cross sections. *Gansu University of Science*, P: 98-102.
14. Jie Wu, Wei Dong Yang, ZhiHao Yu. An Examination of Blade Load Calculations Based on Rigid-Flexible Coupling Model. *Applied Mechanics and Materials* (Volumes 275 - 277), 2013. P.741-745.
15. Delaey L., Krishnam R.V., Tas H., Warlimont H. Thermoelasticity, pseudoelasticity and the memory effects associated with martensitic transformations // *Sci.* 1974. N 9. P. 1359 -1363.
16. Marin I., Wiseman H. Plastic stress-strain relation for aluminum alloy 14S-T4 subjected to combined tension and torsion // *J. of Metals*. V.5. No 9. Sec. 2. 1953.
17. Naghdi P.M., Rowley J.C. An experimental study of biaxial stress-strain relations in plasticity // *J. Mech. and Phys. Solids*, v.3. 1954.
18. Wasilewski R.J. The effect of applied stress on the martensitic transformations in TiNi // *Met. Trans.* 1975 V. 2, N 11. P. 2973 2981.

19. Johnson C., Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method, Cambridge University Press, Cambridge, 1987
20. Gaspar Jr., Moreira M.L., Desampaio P.A.B. Temperature Distribution Fuel Rods: A study on the Effect of Eccentricity in the Position of UO₂ Pellets., 0-th International Conference «Nuclear Energy for New Europe» 2011. IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics (Volume: 18, Issue:1, Jan-feb. 2012)
21. Timoshenko S, Goodier J.N. Theory of Elastic. N.Y., 1951
22. Zienkiewicz O.C. The method in Engineering science. Butterworth-Heinemann. - Oxford-Auckland-Boston-Johannesburg-Melburne-New Delhi, 2000. – P.690.
23. Korenev B.G. Problems of the theory of heat conduction and thermoelasticity. Solutions in Bessel functions. M., 1980.
24. Zh.Tashenova, E.Nurlybaeva, A.Kudaykulov. Method Preparation and Solution Algorithm for Resolving Stationary Problem of a Rod under Thermo - Stressed Condition Restrained at both Ends Affected by Heat Exchange and Heat Flows. World Applied Sciences Journal 22 (Special Issue on Techniques and Technologies): 49-57, 2013, ISSN 1818-4952.
25. Anarbay Kudaykulov, Tashev Azat, Mukaddas Arshidinova and Kalamkas Begaliyeva Power research technique of thermomechanical condition of a core of restricted length, variable section at influence of heterogeneous types of sources of heat . 1st International conference on sustainable science and technology (ICSuSaT-2018) 12-16 October 2018, Antalya-Turkey
26. B.F. Shorr, Thermal Integrity in Mechanics and Engineering, Foundations of Thermoelasticity, Pages 33-55, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2015
27. Yiping Li. Investigation of Heat Transfer Characteristics on Rod Fastening Rotor IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, Volume 677, Issue 3 Citation Yiping Li 2019 IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 677 032032 DOI 10.1088/1757-899X/677/3/032032
28. Khalid S. SHIBIB , Mohammed A. MINSHID, and Nebras E. Alattar: Thermal And Stress Analysis In Nd:Yag Laser Rod With Different Double End Pumping Methods. Thermal Science, Year 2011, Vol. 15, Suppl. 2, pp. S399-S407
29. V.I. Andreev & R.A. Turusov. Nonlinear modeling of the kinetics of thermal stresses in polymer rods. Advanced Materials and Structural Engineering – Hu (Ed.) 2016 Taylor & Francis Group, London
30. D. H. Sukarno Analysis of nuclear fuel rod temperature distribution using CFD calculation and analytical solution AIP Conference Proceedings 2374, 020022 (2021); <https://doi.org/10.1063/5.0058888>
31. Jala M. El-Azab, Hamed M. Kandel, Mohamed A. Khedr, Hatem M. El-Ghandoor Numerical Study of Transient Temperature Distribution in Passively Q-Switched Yb:YAG Solid-State Laser. Optics and Photonics Journal Vol.4 No.3(2014), Article ID:44245,8 pages DOI:10.4236/opj.2014.43007
32. Sirajuddin Elyas Khany , K.N.Krishnan, Mohd Abdul Wahed Study of Transient Temperature Distribution in a Friction Welding Process and its effects on its Joints. International Journal Of Computational Engineering Research

(ijceronline.com) Vol. 2 Issue. 5.2012. Page 1645

33. A Mishchenko Spatially Structure Spatial Problem of the Stressed Deformed State of a Structural Inhomogeneous Rod XIII International Scientific Conference Architecture and Construction 2020 IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 953 (2020) 012004 IOP Publishing doi:10.1088/1757-899X/953/1/012004 1

34. Joong-Ki Hwang Thermal Behavior of a Rod during Hot Shape Rolling and Its Comparison with a Plate during Flat Rolling Processes 2020, 8(3), 327; <https://doi.org/10.3390/pr8030327>

35. Daryl L. Logan. A First Course in the Finite Element Method, CENGAGE Learning 2012. P. 727-764

36. Liu, Q.; He, X. Thermal Analysis of Terfenol-D Rods with Different Structures. *Micromachines* 2023, 14, 216. <https://doi.org/10.3390/mi14010216>

37. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М: Высшая школа, 1970. - 712 с.

38. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы нестационарной теплопроводности. М: Высшая школа, 1978. - 328 с.

39. Gaspar Jr., Moreira M.L., Desampaio P.A.B. Temperature Distribution Fuel Rods: A study on the Effect of Eccentricity in the Position of UO₂ Pellets., 0-th International Conference «Nuclear Energy for New Europe» 2011

40. Air Force Inst, of Technology Wrights Patterson Air Force base. Dayton, Ohio, 1965.

41. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения с частными производными. М.: Наука, 1976. - 392 с.

42. Larry J. Segerlind. Applied Finite Element Analysis, 2nd Edition. 1985, 1984.

43. Harr M. E. Ground Water and Seepage. McGraw-Hill, N.Y., 1962.

44. Fung Y. C. Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1965.

45. Krieth F. Principles of Heat Transfer, 3-rd ed. Index Educational Publishers, N. Y., 1977.

46. Huebner K. H. The Finite Element Method for Engineers. Wiley, N. Y., 1975.

47. J. L. Segerlind, "Applied finite element analysis", New York-London-Sydney-Toronto, John Wiley and Sons, 1976.

48. Visser W. Finite Element Method for Determination of Non-Stationary Temperature Distribution and Thermal Deformations, Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, Air Force Inst, of Technology Wrights Patterson Air Force base. Dayton, Ohio, 1965.

49. Conte S. D. Elementary Numerical Analysis. McGraw-Hill, N. Y., 1965.

50. Kreyszig E. Advanced Engineering Mathematics. 3-rd ed., Wiley, N. Y., 1972.

51. Williams P. W. Numerical Computation. Nelson, Don Mill, Can., 1972.

52. Johnson C. Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
53. Gaspar Jh., moreira m. L., Desampaio P. A. B. Temperature Distribution Fuel Rods: A study on the Effect of Eccentricity in the Position of UO₂ Pellets /7 0-th International Conference „Nuclear Energy for New Europe", 2011. IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics. Jan-feb. 2012. Vol. 18, Iss. 1.
54. Балабух Л.И., Шаповалов Л.А. О вариационных уравнениях термоупругости // Прикладная математика и механика. — 1960. 24. - № 4. — С.703-707.7." Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат. - 1982. - 384 с.
55. Био М.А. Вариационные принципы в теории теплообмена. М.: Энергия, 1975.-209 с.н
56. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности: Пер. с англ. М.: Мир, 1987. - 542 с.
57. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы: Пер. с англ. - М.: Мир, 1984.-428 с.
58. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация.- М.: Мир, 1986.-318 с.
59. Коваленко А.Д. Методы и задачи термоупругости // Прочность и пластичность. Сборник науч. трудов. М.: Наука, 1971. - С. 354-365.
60. Шевченко Ю.Н., Бабешко М.Е., Пискун В.В., Прохоренко И.В., Савченко В.Г. Решение осесимметричной задачи термопластичности для тонкостенных и толстостенных тел вращения на ЕС ЭВМ. Киев: Наукова думка, 1980.- 196 с.
61. Altay G. Askar, Dokmeci M. Cengiz. Some variational principles for linear coupled thermoelasticity // Int. J. Solids and Struct. 1996. - 33 - № 26 -P.3937-3949.
62. Cannarozzi A.A., Ubertini F. A mixed variational method for linear coupled thermoelastic analysis // Int. J. Solids and Struct. 2001. - 38. - № 4 -P.717-739.
63. Nicholson D.W., Lin B. Finite element method for thermomechanical response of near-incompressible elastomers // Acta Mech. 1997. - № 124. - P. 181-198.
64. Yang Zhenglin, Chen Haoran. Mixed-state Hamilton semi-analytical method on thermal elastic problem of laminates // Dalian ligong daxue xuebao=J. Dalian Univ. Technol. 1997. - 37. - № 3. - P. 259-264.
65. Kazykhan Rysgul, Tashev Azat, Aitbayeva Rakhatay, Kudaykulov Anarbay, Kunelbayev Murat, Kuanysh Dauren, Arshidinova Mukaddas A variational approach for estimating the temperature distribution in the body of a rectangular parallelepiped shape // International journal of mechanics E-ISSN: 1998-4448, Volume 16, 2022, Art. #8 .Pages: 65-74.DOI: 10.46300/9104.2022.16.8 **Q3-41**
66. Kazykhan Rysgul, Tashev Azat , Aitbayeva Rakhatay , Kudaykulov Anarbay , Kunelbayev Murat , Zhunusova Aliya, Arshidinova Mukaddas., Kazangapova Bayan Development of methods and computational algorithms

parallelepiped in the presence of temperature and heat exchange. // International journal of mechanics Volume 17, 2023. Pages: 57-63 DOI: 10.46300/9104.2023.17.9 **Q3-41**

67. **Arshidinova M.**, Tashev A., Kudaykulov A. Developing a method of accounting for the existence of local surface heat exchange in rods of variable cross-section// Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 3(7 (123), 53–64. DOI:10.15587/1729-4061.2023.273635 **Q3- 47**

68. Кудайкулов А., Ташев А. А., Аскарлова А. **Аршидинова М.** Основные соотношения нелинейных квадратичных элементов и термоупругих энергетических принципов и моделирование термомеханических процессов в стержнях ограниченной длины при наличии переменного теплового потока. **Монография**, Издательство «Гылым», НАН РК. ISBN 978-601-280-995-4, 132с.

69. M. T Arshidinova, A. Kudaykulov, A.A. Tashev, K.B. Begaliyeva, «Numerical Modeling of Nonlinear Thermomechanical Processes In a Rod Of Variable Cross Section In The Presence Heat Flow», 5th International Conference on Information Science and Control Engineering, 2018.

70. A. Kudaykulov, A. A. Tashev, A. Askarova, «Computational algorithm and the method of determining the temperature field along the length of the rod of variable cross section», Journal Open Engineering

71. Т. К. Коршия, В. Ф. Тишкин, А. П. Фаворский, М. Ю. Шашков. Вариационный подход к построению разностных схем для уравнения теплопроводности на криволинейных сетках. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1980, том 20, номер 2, страницы 401–421

72. Гладкий С.Л., Ясницкий Л.Н. Решение трехмерных задач теплопроводности методом фиктивных канонических областей. Вестник пермского университета 1(5) 2011, с. 41-45

73. Blomberg, T. Heat conduction in two and three dimensions: computer modelling of building physics applications. [Doctoral Thesis (monograph), Division of Building Physics]. Byggnadsfysik LTH, Lunds Tekniska Högskola, 1996, 206.

74. Y. O. Nurettin, «General solution to a class of unsteady heat conduction problems in a rectangular parallelepiped», International journal of Heat and Mass, vol.12, issue 4, pp 393-411, April 1969.

75. J.W. Vergnaud, J. Bouzon, «Heat conduction n a Rectangular parallelepiped», Cure pf thermosetting Resins, pp 89-93.

76. D. Kumar, F. Y. Ayant, C. Cesarano, «Analytical Solutions of Temperature Distribution in a Rectangular Parallelepiped», Axioms ,2022,11,488.

77. D. Kumar, F. Y. Ayant, «Application of Jacobi Polynomial and Multivariable Aleph-Fuctional in heat conduction in Non-Homogeneous moving rectangular parallelepiped» Kragujevac journal of mathematics, vol 45(3), pp439-448, 2021.

78. Shiah, Y., Tuan, N., & Hematiyan, M. (2019). Thermal Stress Analysis of 3D Anisotropic Materials Involving Domain Heat Source by the Boundary Element Method. Journal of Mechanics, 35(6), 839-850. doi:10.1017/jmech.2019.32

79. Галанин М.П., Прошунин Н.Н., Родин А.С., Сорокин Д.Л. Решение трехмерного нестационарного уравнения теплопроводности методом конечных элементов с учетом фазовых переходов. –М.: Наука, 2016. -28с.
80. Endalew Getnet Tsega, "Numerical Solution of Three-Dimensional Transient Heat Conduction Equation in Cylindrical Coordinates", Journal of Applied Mathematics, vol. 2022, Article ID 1993151, 8 pages, 2022. <https://doi.org/10.1155/2022/1993151>
81. Yuriy Povstenko & Tamara Kyrylych. Fractional heat conduction in solids connected by thin intermediate layer: nonperfect thermal contact. Continuum Mechanics and Thermodynamics volume 31, pages 1719–1731 (2019)
82. Иванов В.В., Карасева Л.В. Один из возможных вариантов приближенного решения задач нелинейной теплопроводности. Инженерный вестник Дона, №2 (2019),
83. Павлов В.П., Кудоярова В.М. Анализ температурного поля в твердом теле методом сплайнов. Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета, т.22, №2(80), с.10-17
84. Петрова Л.С. Математическое моделирование процессов нагрева кусочно-однородных тел с учетом релаксации теплового потока. Интернет-журнал «Науковедение», том 9, №1 (2017), <http://naukovedenie.ru/PDF/38TVN117.pdf>
85. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. М.: Атомиздат. 1979. 416 с.
86. Крайнов А.Ю. Основы теплопередачи. Теплопередача через слой вещества: учеб. пособие. – Томск: STT, 2016. – 48 с. ISBN 978-5-93629-558-4
87. Лыков А.В. Теория теплопроводности Учебное пособие. — М.: Высшая школа, 1967. — 600 с.: ил.
88. Овчинников С.В. Введение в теорию теплообмена: теплопроводность в твердых телах. Саратов: СГУ имени Н.Г. Чернышевского, 2015, с. 104
89. Васильев В.А., Калмыкова М.А. О классификации компьютерных программ. // Современные научные исследования и инновации. – Февраль, 2013 [Электронный ресурс]. URL: <http://web.snauka.ru/issues/2013/02/20478>.
90. Кунву Ли. Основы САПР (CAD/CAM/CAE). Издательство: Питер, 2004. – 560 с.
91. CAE. URL: http://ru.wikipedia.org/wiki/Computer-aided_engineering
92. Официальный сайт компании ANSYS Inc. URL: <http://www.ansys.com/>
93. Официальный сайт компании URL: <https://blogs.sw.siemens.com/simcenter/star-cd-es-ice-dars-2020-1-released>
94. Официальный сайт компании URL: <https://www.flow3d.com/>
95. Официальный сайт компании COMSOL. URL: <http://www.comsol.com/>
96. Официальный сайт компании «Топ Системы». URL: <http://www.tflex.ru/>

97. **Аршидинова М.Т.**, Кудайкулов А, Ташев А.А. Метод, алгоритм и программное обеспечение исследования термомеханического состояния стержня переменного сечения в зависимости от температуры окружающей среды // Вестник КазАТК . – 2024. - №2. – С.241-249.

98. Мазаков Т.Ж., Тойкенов Г., **Аршидинова М.Т.**, Мазакова А.Т. Решение уравнения теплопроводности цилиндрического стержня // Вестник КазУТБ. - №2 (22) – 2024. С.13-21.

99. Кудайкулов А, Калимолдаев М.Н., Ташев А.А., **Аршидинова М.Т.**, Бегалиева К.Б. Шектеулі температура мен жылу окшаулағыш бір мезгілде болған кезде сырықтың термо-механикалық жай-күйін зерттеу алгоритмі // Вестник КазНИТУ – технические науки.– 2020. – №3 – С.163-175.

100. Кудайкулов А., Ташев А. , **Аршидинова М.**, Айтбаева Р. Сравнительный анализ аналитического и вариационного методов распределения температуры по длине стержня переменного сечения // Девятнадцатая международная азиатская школа-семинар «Проблемы оптимизации сложных систем» 14-22.08.2023 в Республика Кыргызстан, г. Чолпон-Ата

101. Кудайкулов А., Ташев А. , **Аршидинова М.**, Айтбаева Р. Аналитическое решение задачи определения термомеханических характеристик теплоизолированного стержня переменного сечения // VIII — Международная научно-практическая конференция «Информатика и прикладная математика». Алматы. 26 -27.10.2023

102. A Kudaykulov, A Tashev, **M Arshidinova**, K Begaliyeva Research of a thermo-stressed state of a core of variable section in the presence of a heat flux, thermal insulations and heat exchange. The 16th INTERNATIONAL CONFERENCE INFORMATION TECHNOLOGIES AND MANAGEMENT 2018 April 26-27, 2018, Information Systems Management Institute, Riga, Latvia

103. Кудайкулов А., Ташев А. А., **Аршидинова М.Т.**, Бегалиева К.Б., Аскарва А. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ . "III Международная научно-практическая конференция", уровень Международный, УКРАИНА, Украина, Киевская обл, г. Переяслав-Хмельницкий, апрель 2018

104. Кудайкулов А, Ташев А.А., **Аршидинова М.Т.**, Бегалиева К.Б. Исследование метода и вычислительного алгоритма учета локальных поверхностных теплообменов в стержнях ограниченной длины переменного сечения / Материалы IV международной научно-практической конференции «Информатика и прикладная математика», посвященной 70-летию юбилею профессоров Биярова Т.Н., Вуйчика В. И 60-летию профессора Амиргалиева Е.Н. часть 1, 2019. – С.271-278.

ПРИЛОЖЕНИЕ А – Программное обеспечение
(фрагмент программного кода)

#Для n элементов, линейный, квадратичный

```
def change():
    sterjen=msss.get()
    print('sterjen=',sterjen)
    msss.set(sterjen)

    Lobsh=Lob.get()
    print('Lobsh=',Lobsh)

    kl=varl.get()
    print('левая кнопка k1=',kl)
    if kl==0:
        print ('слева поток ql')
        ql=1
    else:
        ql=0

    if kl==1:
        print ('слева температура Tl')
        Tl=1
    else:
        Tl=0

    if kl==2:
        print ('слева Tis')
        Tocl=1
    else:
        Tocl=0

    if kl==3:
        print ('слева Tisl')
        Tisl=1
    else:
        Tisl=0

    kr=varr.get()
    print('правая кнопка kr=',kr)

    if kr==0:
        print ('справа поток qr')
        qr=1
    else:
        qr=0

    if kr==1:
        print ('справа температура Tr')
        Tr=1
    else:
```

```

Tr=0

if kr==2:
    print ('справа Tocr')
    Tocr=1
else:
    Tocr=0

if kr==3:
    print ('справа Tisr')
    Tisr=1
else:
    Tisr=0

m=ms.get()
print('число элементов m=',m)

lin=int(lnn.get())
print('число элементов lin=',lin)

kolT=kols.get()
print('число узлов, где температура сбоку kolT=',kolT)

kolQ=kolQs.get()
print('число узлов, где температура сбоку kolT=',kolQ)

qli=qlil.get()
print('Поток слева qli=',qli)

qri=qrir.get()
print('Поток справа qri=',qri)

qsi=qrsr.get()
print('Поток с боку qsi=',qsi)

Tli=Tlil.get()
print('T слева= Tli',Tli)

Tri=Trir.get()
print('T справа Tri=',Tri)

Tocli=Toclil.get()
print('Toc слева Tocli=',Tocli)

Tocri=Tocrir.get()
print('Toc справа Tocri=',Tocri)

Tocbi=Tocbir.get()
print('Toc боковой Tocbi=',Tocbi)
Tocbi=float(Tocbi)

Kxxi=Kxxx.get()

```

```

print('Kxxi=',Kxxi)

hli=hhl.get()
print('hli=',hli)

hri=hhr.get()
print('hri=',hri)

hbi=hhb.get()
print('hbi=',hbi)

alfai=alfaa.get()
print('alfai=',alfai)

Latexi=float(Latex.get())
print('Latexi=',Latexi)

Ei=EE.get()
print('Ei=',Ei)

ai=aa.get()
print('ai=',ai)

bi1=bbb.get()
print("bi=",bi1)

Ljmdai=bbb.get()
print('Ljmbdai=',Ljmdai)

neisi=neis1.get()
neis2=list(neisi)
neis=[]
stroka=""
for i in neis2:
    if i!=';':
        stroka=stroka+str(i)
    else:
        neis.append(stroka)
        stroka=""
if stroka!="":
    neis.append(stroka)

print('neis=',neis)

qsi=qs1.get()
qs2=list(qsi)
qs=[]
stroka=""
for i in qs2:
    if i!=';':
        stroka=stroka+str(i)
    else:

```

```

        qs.append(stroka)
        stroka=""
    if stroka!=":
        qs.append(stroka)
    #*****
    Qbi= np.zeros([int(m)], "f") #Величина потока
    Qbiii=Qbi1.get()
    if kolQ!=-1:
        k=0
        Qbi2=list(Qbiii)
        print("Qbi2",Qbi2)
        stroka=""
        for i in Qbi2:
            if i!=",":
                stroka=stroka+str(i)
            else:
                print('STROKA=',stroka)
                print('k=',k)
                Qbi[k]=float(stroka)
                k=k+1
                stroka=""
        print('Qbi=',Qbi)
    #*****
    print('qs=',qs)

    Tesii=Tes1.get()
    Tes2=list(Tesii)
    Tes=[]
    stroka=""
    for i in Tes2:
        if i!=",":
            stroka=stroka+str(i)
        else:
            Tes.append(stroka)
            stroka=""
    if stroka!=":
        Tes.append(stroka)
    print("Tes=',Tes)

    Tesi= np.zeros([2*int(m)+1], "f") #Величина температур
    Tesiii=Tesi1.get()
    if Tes[0]!=-1:
        k=0
        Tesi2=list(Tesiii)
        stroka=""
        for i in Tesi2:
            if i!=",":
                stroka=stroka+str(i)
            else:
                Tesi[k]=float(stroka)
                k=k+1
                stroka=""

```

```

    if stroka!=":
        Tesi[k]=float(stroka)
        k=k+1
    print("Tesi=',Tesi)
#*****
# НАЧАЛО ПРОГРАММЫ
t_begin=time.time()

x=sympy.Symbol('x')
z = sym.symbols('z')
a=sympy.Symbol('a')
L=sympy.Symbol('L')
Kxx=sympy.Symbol('Kxx')
TocL=sympy.Symbol('TocL')
TocR=sympy.Symbol('TocR')
TocB=sympy.Symbol('TocB')
qS=sympy.Symbol('qS')
qR=sympy.Symbol('qR')
qL=sympy.Symbol('qL')
TL=sympy.Symbol('TL')
TR=sympy.Symbol('TR')
hl=sympy.Symbol('hl')
hr=sympy.Symbol('hr')
hb=sympy.Symbol('hb')
Ljmda=sympy.Symbol('Ljmda')
PI=sympy.Symbol('PI')
alfa=sympy.Symbol('alfa')

#neis=[0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12]
#*****
# Tes=[4,8] # наличие боковой температуры (точки, где есть)
#Tes=[-1] # нет узлов, где имеются боковые температуры
#*****
# Выбор стержня или конуса
#sterjen=0
sterjen=int(sterjen)
m=int(m)
Lobsh=float(Lobsh)
hli=float(hli)
hri=float(hri)
hbi=float(hbi)
alfai=float(alfai)
Ei=float(Ei)
Kxxi=float(Kxxi)
bi1=int(bi1)
ai=float(ai)
qli=float(qli)
qri=float(qri)
# qsi=float(qsi)
Tli=float(Tli)
Tri=float(Tri)
Tocli=float(Tocli)

```

```

Tocri=float(Tocri)
kolT=int(kolT) # количество узлов, куда с боку подается температура
if sterjen==0:
    print('Рассматривается конус!!!!')
else:
    print('Рассматривается стержень!!!!')

print('Боковая температура Tes задана для узлов ', Tes)
print('Боковой поток qs для элементов ', qs)
print('Нетеплоизолированные узлы ', neis)
#*****
if lin==1:
    n=m+1
else:
    n=2*m+1 # число узлов
Pi=math.pi
Li=Lobsh/m
bi2=bi1+ai*Lobsh
#*****
print("")
print('ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ПРИ ВХОДЕ В ПРОГРАММУ')
print('Не изолированные элементы neis=',neis)
print('Боковые элементы, где имеется поток qs=',qs)
if qs!=-1:
    print('Поток в боковых элементах, где имеется поток Qbi=',Qbi)
print('Число боковых узлов, где имеется температура kolT=',kolT)
if kolT!=-1:
    print('Номера боковых узлов, где есть температура Tes=',Tes)

if lin==1:
    print('Линейная аппроксимация')
if lin==0:
    print('Квадратичная аппроксимация')

print('число элементов m=',m)
print('число узлов n=',n)
if kolT!=-1:
    print('Температуры в боковых узлах Tesi=',Tesi)
print('Общая длина L=',Lobsh)

print('Значение температуры окружающей среды сбоку Tocbi=',Tocbi)
print('Значение температуры окружающей среды слева Tocli=',Tocli)
print('Значение температуры окружающей среды справа Tocri=',Tocri)
print('Значение alfa, alfai =',alfai)
print('Значение модуля упругости E, Ei =',Ei)
print('Число Pi=',Pi)
print('Значение h для левого торца стержня hli =',hli)
print('Значение h для правого торца стержняhri =',hri)
print('Значение h для бока стержня hbi =',hbi)
print('Длина элемента Li=',Li)
print('Kxx=',Kxxi)
print('наклон стержня-конуса a=',ai)

```

```

print('Коэффициент b в уравнение ax+b bi1=',bi1)

print('Символ поток тепла слева ql=',ql)
print('Символ температуры слева Tl=',Tl)
print('Символ температуры окружающей среды Tosl=',Tosl)

print('Символ потока тепла справа ql=',qr)
print('Символ температуры справа Tr=',Tr)
print('Символ температуры окружающей среды справа Tosr=',Tosr)

print(' Значение потока слева qli=',qli)
print(' Значение потока справа qri=',qri)
print(' Значение температуры слева Tli=',Tli)
print(' Значение температуры справа Tri=',Tri)

if Tisl!=false:
    print('Левый бок изолирован Tisl=',Tisl)
if Tisr!=false:
    print('Правый бок изолирован Tisr=',Tisr)

#*****
if sterjen==1:
    print("ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТЕРЖНЯ")
    ai=0
else:
    print("ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОНУСООБРАЗНОГО
СТЕРЖНЯ")
#*****
# Получение bi
bi=np.zeros([m+1], "f")
t=0
print("bi1=",bi1)
print("bi2=",bi2)
while t<=m:
    bi[t]=bi1-(bi1-bi2)*t/m
    t=t+1
print("bi=",bi)
TT = Matrix([[var('T:125')]])
bb = Matrix([[var('b:125')]])
QQ = Matrix([[var('Q:125')]])
Tt = Matrix([[var('t:125')]])

Dt= [1] * n
i=0
while i<n:
    Dt[i]=Tt[0][i]
    i=i+1
print('Dt=',Dt)

T= [1] * n
i=0
while i<n:

```

```

T[i]=TT[0][i]
i=i+1
print('T=',T)

Q= [1] * m
i=0
while i<m:
    Q[i]=QQ[0][i]
    i=i+1
print('Q=',Q)

BP= [1] * n

A= [1] * n
i=0
while i<n:
    A[i]=[1] * n
    i=i+1
print('A=',A)

b= [1] * (m+1)
i=0
while i<m+1:
    b[i]=bb[0][i]
    i=i+1
print('b=',b)

AN= [1] * n
i=0
while i<n:
    AN[i]=[1] * n
    i=i+1
print('AN=',AN)

z=0
for i in range(m):
    if lin==1:
        j=i
        z=z+(Kxx/2)*((-T[j]+T[j+1])**2)* PI*(a*x+b[i])**2 /L**2
        if str(i) in neis:
            z=z+2*PI*(a*x+b[i])*(hb/2)*(((L-x)*T[j]+x*T[j+1])/L-TocB)**2
        print('QQQQQQQQQQQQQQQQQ=',Q)
        if str(i) in qs:
            print('Q['+i,']=',Q[i])
            z=z+2*Q[i]*((L-x)*T[j]+x*T[j+1])* PI*(a*x+b[i])**2 /((a*x+b[i])*L)

    if lin==0:
        j=2*i
        z=z+(Kxx/2)*(((4*x-3*L)*T[j]+(4*L-8*x)*T[j+1]+(4*x-L)*T[j+2])**2)* PI*(a*x+b[i])**2
/L**4
        if str(i) in neis:

```

```

z=z+2*PI*(a*x+b[i])*(hb/2)*(((2*x**2-3*L*x+L**2)*T[j]+\
(4*L*x-4*x**2)*T[j+1]+\
(2*x**2-L*x)*T[j+2])/L**2-TocB)**2
print('Q=',Q)
if str(i) in qs:
    print('ПРОВЕРКА ВХОДА в qs')
    print('Q[,i,]=',Q[i])
##
z=z+2*PI*(a*x+b[i])*Q[i]
z=z+2*PI*(a*x+b[i])*Q[i]*(((2*x**2-3*L*x+L**2)*T[j]+(4*L*x-4*x**2)*T[j+1]+\
(2*x**2-L*x)*T[j+2])/L**2
print('Вычисляем интеграл для температуры, ждите ...')
if sterjen==1:
    z=z.subs({a:ai})
    for i in range(m):
        z=z.subs({b[i]:bi1})
#-----
if Latexi==1:
    print("LATEX=")
    Fout = open ( "output.tex", "w" )

    Fout.write("\documentclass[english]{ article}\n')
    Fout.write("\usepackage[T2A,T1]{ fontenc}\n')
    Fout.write("\usepackage[latin9]{ inputenc}\n')
    Fout.write("\usepackage{ amstext}\n')
    Fout.write("\usepackage{ babel}\n')
    Fout.write("\usepackage{ graphicx}\n')
    Fout.write("\graphicspath{ { pictures/} }\n')
    Fout.write("\DeclareGraphicsExtensions{ .pdf,.png,.jpg}%\n')

    Fout.write('\n')
    Fout.write('\makeatletter')
    Fout.write('\n')

    Fout.write('\n')
    Fout.write("\DeclareRobustCommand{\cyrtext}{ %}')
    Fout.write('\n')
    Fout.write(' \fontencoding{ T2A }\selectfont\def\encodingdefault{ T2A }')
    Fout.write('\n')
    Fout.write("\DeclareRobustCommand{\textcyr}[1]{\leavevmode{\cyrtext #1}}')
    Fout.write('\n')
    Fout.write('\n')
    Fout.write('\makeatother')
    Fout.write('\n')

    Fout.write("\begin{ document}\n')

Fout.write("\textcyr{\CYRP\cyro\cyrd\cyri\cyrn\cyrt\cyre\cyrg\cyrr\cyra\cyrl\cyrsftsn\cyrn\cyra\cyr
ya}')
    Fout.write('\n')
    Fout.write("\textcyr{\cyrf\cyru\cyrn\cyrk\cyrc\cyri\cyrya}')
    Fout.write("\textcyr{\cyrd\cyrl\cyrya}')
    Fout.write('T')

```

```

Fout.write("\\")
Fout.write("\\")
Fout.write('\n')

Fout.write("\\textbf{Function for T is:}")
Fout.write("\\")
Fout.write("\\")
Fout.write("\n")
Fout.write("\\begin{math}")
Fout.write("z=")
Fout.write(printing.latex(z))
Fout.write("\n")
Fout.write("\\end{math}")
Fout.write("\n")
print("KOHEI LATEX=")
#-----
u=sympy.integrate(z, (x,0,L))

if lin==1:
    if Tocl==1:
        u=u+(hl/2)* PI*(b[0])**2 *(T[0]-TocL)**2
    if Tocr==1:
        u=u+(hr/2)* PI*(a*L+b[m])**2 *(T[n-1]-TocR)**2
if lin==0:
    if Tocl==1:
        u=u+PI*(b[0])**2*(hl/2)*(T[0]-TocL)**2
    if Tocr==1:
        u=u+PI*(a*L+b[m])**2*(hr/2)*(T[n-1]-TocR)**2

sympy.pprint(u.expand())

if sterjen==1:
    u=u.subs({a:ai})
    for i in range(m):
        u=u.subs({b[i]:bi1})
#-----
if Latexi==1:
    print("LATEX=")

Fout.write("\\")
Fout.write("\\")

Fout.write("\\textcyr{\CYRI\cyrn\cyrt\cyre\cyrg\cyrr\cyra\cyrl}")
Fout.write("\n")
Fout.write("\\textcyr{\cyrd\cyrl\cyrya}")
Fout.write("T")
Fout.write("\\")
Fout.write("\\")
Fout.write("\n")
Fout.write("\\textbf{Integral is:}")
Fout.write("\\")

```

```

Fout.write("\\")
Fout.write("\n")
Fout.write("\\begin{math}\n')
Fout.write("u=")
Fout.write(printing.latex(u))
Fout.write("\n")
Fout.write("\\end{math}')
Fout.write("\n")
print("КОHEЦ LATEX=")
#=====
DT = [1] * n
i=0
while i<n:
    DT[i]=sympy.diff(u,T[i])
#=====
if Latexi==1:
    print("LATEX=")
    Fout.write("\\")
    Fout.write("\\")
    Fout.write("\\textcyr{\CYRP\cyrr\cyro\cyri\cyrz\cyrv\cyro\cyrd\cyrn\cyra\cyrya}')
    Fout.write("\\")
    Fout.write("\\")
    Fout.write("\n")
    Fout.write("\\textbf{ diffirensial: }')
    Fout.write("\\")
    Fout.write("\\")
    Fout.write("\n")
    Fout.write("\\begin{math}\n')
    Fout.write('T[')
    Fout.write(str(i))
    Fout.write('=')
    Fout.write(printing.latex(DT[i].expand()))
    Fout.write("\n")
    Fout.write("\\end{math}')
    Fout.write("\n")
    print("КОHEЦ LATEX=")
#=====
    sympy.pprint(DT[i].expand())
    i=i+1
#*****
print('Формируем систему уравнений для температуры, ждите ...')

i=0
while i<n:
    BB=-DT[i]
    for r in range(n):
        BB=BB.subs({T[r]:0})
    BP[i]=BB
    i=i+1

i=0
while i<n:

```

```

j=0
while j<n:
    AA=DT[i]
    for r in range(n):
        if r==j:
            AA=AA.subs({TT[0][r]:1})
        else:
            AA=AA.subs({TT[0][r]:0})
    A[i][j]=AA+BP[i]
    j=j+1
    i=i+1
#*****
if lin==1:
    if ql==1:
        BP[0]=BP[0]-qL*PI*b[0]**2
    if qr==1:
        BP[n-1]=BP[n-1]-qR*PI*b[m]**2

if lin==0:

    if ql==1:
        BP[0]=BP[0]-qL*PI*b[0]**2
    if qr==1:
        BP[n-1]=BP[n-1]-qR*PI*b[m]**2
#*****
if Tl==1:
    BP[0]=A[0][0]*Tli
    BP[1]=-A[1][0]*Tli+BP[1]
    BP[2]=-A[2][0]*Tli+BP[2]
    i=1
    while i<n:
        A[0][i]=0
        A[i][0]=0
        i=i+1

if Tr==1:
    BP[n-1]=A[n-1][n-1]*Tri
    BP[n-2]=-A[n-2][n-1]*Tri+BP[n-2]
    BP[n-3]=-A[n-3][n-1]*Tri+BP[n-3]
    i=0
    while i<n-1:
        A[n-1][i]=0
        A[i][n-1]=0
        i=i+1

#*****
#from sympy import Rational

i=0
while i<n:
    print('Правая часть BP['+i+']=')
    if BP[i]==0:

```

```

    print(BP[i])
else:
    sympy.pprint(BP[i].expand())
j=0
print('Левая часть=')
while j<n:
    print('A['+i,'] ['+j,']=')
    if A[i][j]==0:
        print(A[i][j])
    else:
        sympy.pprint(A[i][j].expand())
    j=j+1
i=i+1

```

#=====

```

if Latexi==1:
    def AB(A,BP):
        print("LATEX=")
        Fout.write("\\")
        Fout.write("\\")
        Fout.write("\\textbf{ A and B }')
        Fout.write("\\")
        Fout.write("\\")
        Fout.write("\\n")

        for i in range(n):
            for j in range(n):
                Fout.write("\\begin{math}')
                Fout.write("\\n")
                Fout.write('A[')
                Fout.write(str(i))
                Fout.write('][')
                Fout.write(str(j))
                Fout.write(']=')
                if A[i][j]!=0:
                    Fout.write(printing.latex(A[i][j].expand()))
                else:
                    Fout.write(str(A[i][j]))
                Fout.write("\\n")

                Fout.write("\\end{math}')
                Fout.write("\\n")
                Fout.write("\\")
                Fout.write("\\")
            Fout.write("\\begin{math}\\n')
            Fout.write('B[')
            Fout.write(str(i))
            Fout.write(']=')
            Fout.write(str(BP[i]))
            Fout.write("\\n")
            Fout.write("\\")
            Fout.write("\\")

```

```

        Fout.write("\\end{math}")
        Fout.write("\\n")
    if ((lin==1)and(m==2 or m==5))or((lin==0)and(m==1 or m==2)):
        Fout.write("\\includegraphics{F1}")
        Fout.write("\\n")
        Fout.write("\\includegraphics{F2}")
        Fout.write("\\")
        Fout.write("\\")
        Fout.write("\\n")
    print("KOHEI LATEX=")
#=====
    AB(A,BP)
    AT = np.zeros([n, n], "f")
    BT = np.zeros([n], "f")

    i=0
    while i<n:
        if BP[i]==0:
            BT[i]=0
        else:
            BB=BP[i]

            for r in range(m+1):
                BB=BB.subs({b[r]:bi[r]})
            if r in range(m):
                if str(r) in str(qs):
                    BB=BB.subs({Q[r]:Qbi[r]})
                BB.subs({qL:qli,qR:qri,T[0]:Tli,T[n-
1]:Tri,a:ai,Kxx:Kxxi,hl:hli,hr:hri,hb:hbi,L:Li,TocL:Tocli,TocR:Tocri,TocB:Tocbi,PI:Pi})

            sympy.pprint(BB.expand())
            BT[i]=BB.subs({qL:qli,qR:qri,T[0]:Tli,T[n-
1]:Tri,a:ai,Kxx:Kxxi,hl:hli,hr:hri,hb:hbi,L:Li,TocL:Tocli,TocR:Tocri,TocB:Tocbi,PI:Pi})
            j=0
            while j<n:
                if A[i][j]==0:
                    AT[i][j]=0
                else:
                    AA=A[i][j]
                    for r in range(m+1):
                        AA=AA.subs({b[r]:bi[r]})
                    if str(r) in qs:
                        AA=AA.subs({Q[r]:Qbi[r]})

            ##      print("qs",qs)
            ##      print("AA.UUBS",AA.subs({qL:qli,qR:qri,T[0]:Tli,T[n-
1]:Tri,a:ai,Kxx:Kxxi,hl:hli,hr:hri,hb:hbi,L:Li,TocL:Tocli,TocR:Tocri,TocB:Tocbi,PI:Pi}))

            AT[i][j]=AA.subs({qL:qli,qR:qri,T[0]:Tli,T[n-
1]:Tri,a:ai,Kxx:Kxxi,hl:hli,hr:hri,hb:hbi,L:Li,TocL:Tocli,TocR:Tocri,TocB:Tocbi,PI:Pi})
            j=j+1
            i=i+1

```

```

#####
print('A_до=',AT)
print('B_до=',BT)

if kolT!=-1:
    for k in Tes:
        k=int(k)
        print('Tes[0]=' ,Tes[0])
        for i in range(n):
            if i==k:
                BT[i]=AT[i][k]*float(Tesi[k])
            else:
                BT[i]=BT[i]-AT[i][k]*float(Tesi[k])
            if i==k:
                for j in range(n):
                    if j!=k:
                        AT[i][j]=0
            else:
                AT[i][k]=0

#####
if Latexi==1:
    def CLU(AT,BT):
        print("LATEX=")
        Fout.write("\\")
        Fout.write("\\")
        Fout.write("\\textbf{System of equation}')
        Fout.write("\\")
        Fout.write("\\")
        Fout.write("\\n")
        C=""
        for i in range(n):
            C=C+'c'
        Fout.write("$\\left[\\begin{array}{ccc}\\n")
        for i in range(n):
            for j in range(n):
                Fout.write(str(AT[i][j]/Pi))
                if j!=n-1:
                    Fout.write("\\")
                    Fout.write('$')

            if i!=n-1:
                Fout.write("\\")
                Fout.write("\\")
            Fout.write("\\n")
        Fout.write("\\end{array}\\right]$$\\left(\\begin{array}{c}\\n")

        for i in range(n):
            Fout.write("T_{")
            Fout.write(str(i))
            Fout.write("}")

```

```

        if i!=n-1:
            Fout.write("\\")
            Fout.write("\\")
        Fout.write("\n")

Fout.write("\\end{array}\\right)$=$\\left(\\begin{array}{c}\\n")
for i in range(n):
    Fout.write(str(BT[i]/Pi))
    if i!=n-1:
        Fout.write("\\")
        Fout.write("\\")
    Fout.write("\n")

Fout.write("\\end{array}\\right)$\n")

CLU(AT,BT)
print("КОНЕЦ LATEX=")

#*****
print('A_после=',AT)
print('B_после=',BT)

print('Решаем систему уравнений для температуры, ждите ...')

print('Решение по T',np.linalg.solve(AT, BT))

y=np.linalg.solve(AT, BT)
#=====
if Latexi==1:
    print("LATEX=")
    Fout.write("\\")
    Fout.write("\\")
    Fout.write("\\textbf{Solution T is: }')
    Fout.write("\\")
    Fout.write("\\")
    Fout.write("\\n")

    for i in range(n):
        Fout.write("\\begin{math}\\n')
        Fout.write('T[')
        Fout.write(str(i))
        Fout.write('=')
        Fout.write(str(y[i]))
        Fout.write("\n")
        Fout.write("\\")
        Fout.write("\\")
        Fout.write("\\end{math}')
        Fout.write("\n")
#=====
# Нестационарная часть
#*****

```

```

if ((lin==0)and(m==1 or m==2))or((lin==1)and(m==2 or m==5)):
    nes=0
    T= [1] * n
    i=0
    while i<n:
        T[i]=TT[0][i]
        i=i+1
    print('T=',T)
    for i in range(m):
        if lin==1:
            nes=nes+Ljmda* PI*(a*x+b[i])**2 *((L-x)*T[i]+x*T[i+1]) * ((L-
x)*Dt[i]+x*Dt[i+1])/L**4

            if lin==0:
                j=2*i
                nes=nes+Ljmda* PI*(a*x+b[i])**2 *(((2*x**2-3*L*x+L**2)*T[j]+(4*L*x-
4*x**2)*T[j+1]+(2*x**2-L*x)*T[j+2])/L**2)*\
                (((2*x**2-3*L*x+L**2)*Dt[j]+(4*L*x-4*x**2)*Dt[j+1]+(2*x**2-
L*x)*Dt[j+2])/L**2)
            u=sympy.integrate(nes, (x,0,L))

    DTN = [1] * n
    i=0
    while i<n:
        DTN[i]=sympy.diff(u,T[i])
        print('Производная по T['+i,']=')
        sympy.pprint(DTN[i].expand())
        i=i+1
    print('Формируем систему уравнений для нестационарной части ...')

    i=0
    while i<n:
        j=0
        while j<n:
            AA=DTN[i]
            for r in range(n):
                if r==j:
                    AA=AA.subs({Tt[0][r]:1})
                else:
                    AA=AA.subs({Tt[0][r]:0})
            AN[i][j]=AA
            j=j+1
        i=i+1
    print("НЕСТАЦИОНАРНОСТЬ ФОРМУЛА AN=",AN )

#Получение численной матрицы

NS = np.zeros([n, n], "f")
for i in range(n):
    for j in range(n):
        BB=AN[i][j]
        for r in range(m+1):

```

```

BB=BB.subs({b[r]:bi[r]})

NS[i][j]=BB.subs({L:Li,Ljmda:Ljmdai, a:ai,PI:Pi} )
print("НЕСТАЦИОНАРНОСТЬ ЧИСЛЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ NS=",NS )

# Получение обратной матрицы NS
nest=np.linalg.inv(NS)
AA = np.zeros([n, n+1], "f")# матрица со свободным членом
for i in range(n):
    for j in range(n):
        for k in range(n):
            AA[i][j]=AA[i][j]+nest[i][k]*AT[k][j]

for i in range(n):
    for j in range(n):
        AA[i][n]=AA[i][n]+nest[i][j]*BT[j]
print('A нестационарная=',AA)

if lin==1:
    if m==2:
        def dotu(u,t0):
            x,y,z=u # вектор переменных
            dotx=-AA[0][0]*x-AA[0][1]*y-AA[0][2]*z+AA[0][3]
            doty=-AA[1][0]*x-AA[1][1]*y-AA[1][2]*z+AA[1][3]
            dotz=-AA[2][0]*x-AA[2][1]*y-AA[2][2]*z+AA[2][3]
            return [dotx,doty,dotz]
        t=np.linspace(0,50,14) # точки интегрирования
        u0=[0,0,0] # начальное условие
        u=odeint(dotu,u0,t) # решение
        from pylab import plot, show
        #u=array(u).transpose()
        u=u.transpose()
        plt.plot(t,u[0])
        plt.plot(t,u[1])
        plt.plot(t,u[2])
    if m==5:
        def dotu(u,t0):
            x0,x1,x2,x3,x4,x5=u # вектор переменных
            dotx0=-AA[0][0]*x0-AA[0][1]*x1-AA[0][2]*x2-AA[0][3]*x3-AA[0][4]*x4-
AA[0][5]*x5+AA[0][6]
            dotx1=-AA[1][0]*x0-AA[1][1]*x1-AA[1][2]*x2-AA[1][3]*x3-AA[1][4]*x4-
AA[1][5]*x5+AA[1][6]
            dotx2=-AA[2][0]*x0-AA[2][1]*x1-AA[2][2]*x2-AA[2][3]*x3-AA[2][4]*x4-
AA[2][5]*x5+AA[2][6]
            dotx3=-AA[3][0]*x0-AA[3][1]*x1-AA[3][2]*x2-AA[3][3]*x3-AA[3][4]*x4-
AA[3][5]*x5+AA[3][6]
            dotx4=-AA[4][0]*x0-AA[4][1]*x1-AA[4][2]*x2-AA[4][3]*x3-AA[4][4]*x4-
AA[4][5]*x5+AA[4][6]
            dotx5=-AA[5][0]*x0-AA[5][1]*x1-AA[5][2]*x2-AA[5][3]*x3-AA[5][4]*x4-
AA[5][5]*x5+AA[5][6]
            return [dotx0,dotx1,dotx2,dotx3,dotx4,dotx5]
        t=np.linspace(0,50,1e4) # точки интегрирования

```

```

u0=[0,0,0,0,0,0] # начальное условие
u=odeint(dotu,u0,t) # решение
from pylab import plot, show
#u=array(u).transpose()
u=u.transpose()
plt.plot(t,u[0])
plt.plot(t,u[1])
plt.plot(t,u[2])
plt.plot(t,u[3])
plt.plot(t,u[4])
plt.plot(t,u[5])

if lin==0:
    if m==1:
        def dotu(u,t0):
            x,y,z=u # вектор переменных
            dotx=-AA[0][0]*x-AA[0][1]*y-AA[0][2]*z+AA[0][3]
            doty=-AA[1][0]*x-AA[1][1]*y-AA[1][2]*z+AA[1][3]
            dotz=-AA[2][0]*x-AA[2][1]*y-AA[2][2]*z+AA[2][3]
            return [dotx,doty,dotz]
        t=np.linspace(0,50,20) # точки интегрирования
        u0=[0,0,0] # начальное условие
        u=odeint(dotu,u0,t) # решение
        from pylab import plot, show
        #u=array(u).transpose()
        u=u.transpose()
        plt.plot(t,u[0])
        plt.plot(t,u[1])
        plt.plot(t,u[2])
    if m==2:
        def dotu(u,t0):
            x0,x1,x2,x3,x4=u # вектор переменных
            dotx0=-AA[0][0]*x0-AA[0][1]*x1-AA[0][2]*x2-AA[0][3]*x3-
AA[0][4]*x4+AA[0][5]
            dotx1=-AA[1][0]*x0-AA[1][1]*x1-AA[1][2]*x2-AA[1][3]*x3-
AA[1][4]*x4+AA[1][5]
            dotx2=-AA[2][0]*x0-AA[2][1]*x1-AA[2][2]*x2-AA[2][3]*x3-
AA[2][4]*x4+AA[2][5]
            dotx3=-AA[3][0]*x0-AA[3][1]*x1-AA[3][2]*x2-AA[3][3]*x3-
AA[3][4]*x4+AA[3][5]
            dotx4=-AA[4][0]*x0-AA[4][1]*x1-AA[4][2]*x2-AA[4][3]*x3-
AA[4][4]*x4+AA[4][5]
            return [dotx0,dotx1,dotx2,dotx3,dotx4]
        t=np.linspace(0,50,20) # точки интегрирования
        u0=[0,0,0,0,0] # начальное условие
        u=odeint(dotu,u0,t) # решение
        from pylab import plot, show
        #u=array(u).transpose()
        u=u.transpose()
        plt.plot(t,u[0])
        plt.plot(t,u[1])
        plt.plot(t,u[2])

```

```

plt.plot(t,u[3])
plt.plot(t,u[4])

plt.title(u"Temperature",{ 'fontname':'Arial','fontsize':16})
plt.ylabel(u"T(x)",{ 'fontname':'Arial','fontsize':16},rotation=90)
plt.xlabel(u" t ",{ 'fontname':'Arial','fontsize':16})

plt.grid(True)
plt.savefig('F1.png')
plt.show()

# Конец нестационарной части
#*****

# Вычисление площади
s=0
ii=0
while ii<m:
    if lin==1:
        jj=ii
        s=s+(y[jj]+y[jj+1])*Li/2
    if lin==0:
        jj=2*ii
        s=s+y[jj]+4*y[jj+1]+y[jj+2]
    ii=ii+1
s=s*Lobsh/6
print('Площадь для одного интервала s=41953.8464355')
print('Площадь s=',s)
print('Процент ошибки=', abs(s-41953.8464355)*100/41953.8464355)

# Построение графика
#*****

# Температура T
plt.subplot(221)

def pert(i,j,y):
    if lin==1:
        x = np.linspace(Li*2*i,Li*(2*i+2))
        j=2*i
        k=i
        Lii=2*Li
        yy=1/(Lii**2)*((2*(x-Lii*k)**2-3*Lii*(x-Lii*k)+Lii**2)*y[j]+(4*Lii*(x-Lii*k)-4*(x-
Lii*k)**2)*y[j+1]+\
                (2*(x-Lii*k)**2-Lii*(x-Lii*k))*y[j+2])
        plt.plot(x,yy,color="blue")
    if i==r-1:
        k=n-3
        x = np.linspace(Li*k,Li*(k+2))
        j=n-3
        yy=1/(Lii**2)*((2*(x-Li*k)**2-3*Lii*(x-Li*k)+Lii**2)*y[j]+(4*Lii*(x-Li*k)-4*(x-
Li*k)**2)*y[j+1]+\
                (2*(x-Li*k)**2-Lii*(x-Li*k))*y[j+2])

```

```

    plt.plot(x,yy,color="blue")
    return(yy)
if lin==0:
    x = np.linspace(Li*i,Li*(i+1))
    yy=1/(Li**2)*((2*(x-Li*i)**2-3*Li*(x-Li*i)+Li**2)*y[j]+(4*Li*(x-Li*i)-4*(x-
Li*i)**2)*y[j+1]+(2*(x-Li*i)**2-Li*(x-Li*i))*y[j+2])
    plt.plot(x,yy,color="blue")
    return(yy)
if lin==1:
    r=int(n//3)
    l=n%3
    if m>5:
        r=r+1
    for i in range(r):
        pert(i,j,y)

if lin==0:
    for i in range(m):
        j=2*i
        pert(i,j,y)
#*****

plt.title(u"Temperature",{'fontname':'Arial','fontsize':16})
plt.ylabel(u"T(x)",{'fontname':'Arial','fontsize':16},rotation=90)
plt.xlabel(u" x ",{'fontname':'Arial','fontsize':16})
plt.grid(True)

# Конец температуры
#*****
#Удлинение udl
udl=0
i=0
while i<m:
    if lin==1:
        j=i
        z=alfai*((Li-x)*y[j]+x*y[j+1])/Li

    if lin==0:
        j=2*i
        z=alfai*((Li**2-3*Li*x+2*x**2)*y[j]+(4*Li*x-4*x**2)*y[j+1]+(2*x**2-
Li*x)*y[j+2])/Li**2
    u=sympy.integrate(z, (x,0,Li))
    udl=udl+u
    i=i+1
print ("Удлинение udl",udl)
# Конец удлинения
#*****
#Осевое усилие R
R=5-5
i=0
if lin==1:
    while i<m:

```

```

    j=i
    SECH=Pi*(ai*Li*i+bi)**2
    z=alfai*Li*(y[j]+y[j+1])/2
##    z=alfai*((Li**3-3*Li**3/2+2*Li**3/3)*y[j]+(4*Li**3/2-4*Li**3/3)*y[j+1]+(2*Li**3/3-
Li**3/2)*y[j+2])/Li**2
    R=R-Ei*SECH*z/(Lobsh)
    i=i+1
if lin==0:
    while i<m:
        SECH=Pi*(ai*Li*i+bi)**2
        j=2*i
        z=alfai*((Li**3-3*Li**3/2+2*Li**3/3)*y[j]+(4*Li**3/2-4*Li**3/3)*y[j+1]+(2*Li**3/3-
Li**3/2)*y[j+2])/Li**2
        R=R-Ei*SECH*z/(Lobsh)
        i=i+1
    print('Осевое усилие для стержня=',R)
    R=R[0]
##    while i<m:
##        SECH=Pi*(ai*Li*i+bi1)**2
##        if lin==1:
##            j=i
##            z=alfai*((Li-x)*y[j]+x*y[j+1])/Li
##
##        if lin==0:
##            j=2*i
##            z=alfai*((Li**2-3*Li*x+2*x**2)*y[j]+(4*Li*x-4*x**2)*y[j+1]+(2*x**2-
Li*x)*y[j+2])/Li**2
##        u=sympy.integrate(z, (x,0,Li))
##        R=R-Ei*SECH*u/(2*Li)
##        i=i+1
##        print('Осевое усилие=',R)
##        if sterjen==1:
##            R=-udl*Ei*Pi*bi1**2/Lobsh

# Конец осевого усилия
#*****
# Деформация
#plt.subplot(223)
pylab.figure

plt.subplot(222)
ex = np.zeros([n], "f")
exx = np.zeros([n], "f")
eT = np.zeros([n], "f")
#*****

```

ПРИЛОЖЕНИЕ Б - Свидетельства о государственной регистрации прав на объект авторского права

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ  РЕСПУБЛИКА КАЗАХСТАН

АВТОРЛЫҚ ҚҰҚЫҚПЕН ҚОРҒАЛАТЫН ОБЪЕКТІЛЕРГЕ ҚҰҚЫҚТАРДЫҢ
МЕМЛЕКЕТТІК ТІЗІЛІМГЕ МӘЛІМЕТТЕРДІ ЕНГІЗУ ТУРАЛЫ
КУӘЛІК

2019 жылғы « 19 » ақпан № 1845

Автордың (лардың) жөні, аты, әкесінің аты (егер ол жеке басын куәландыратын құжатта көрсетілсе):
АРЫФЕНОВА МҰҚАДДАС ТУРҒАНОВИҚ КҮДАЙҚОЛОВ АНҒРБЫ; ТАШЕВ АЗАТ АРҰПОВИҚ; БЕГІЛЫЕВА КАДЫМКАС БАПТАСБЕКОВНА

Авторлық құқық объектісі: ЗЕМ-ге арналған бағдарлама
Automated system for investigation the thermophysical state of the rod – ASIR

Объектінің атауы: 1.0

Объектіні жасаған күні: 01.03.2018

СВИДЕТЕЛЬСТВО
О ВНЕСЕНИИ СВЕДЕНИЙ В ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РЕЕСТР
ПРАВ НА ОБЪЕКТЫ, ОХРАНЯЕМЫЕ АВТОРСКИМ ПРАВОМ

№ 1845 от « 19 » февраля 2019 года

Фамилия, имя, отчество, (если оно указано в документе, удостоверяющем личность) автора (ов):
АРЫФЕНОВА МҰҚАДДАС ТУРҒАНОВИҚ КҮДАЙҚОЛОВ АНҒРБЫ; ТАШЕВ АЗАТ АРҰПОВИҚ; БЕГІЛЫЕВА КАДЫМКАС БАПТАСБЕКОВНА

Вид объекта авторского права: программа для ЭВМ
Automated system for investigation the thermophysical state of the rod – ASIR

Название объекта: 1.0

Дата создания объекта: 01.03.2018





Құжат тіпінсөзін <http://www.kazpatent.kz/> сайтының
"Авторлық құқық" бөлімінде таскеруге болады. <https://copyright.kazpatent.kz>
Подлинность документа возможно проверить на сайте [kazpatent.kz](http://www.kazpatent.kz)
в разделе «Авторское право» <https://copyright.kazpatent.kz>

Подписано ЭЦП Оспанов Е. К.

Авторское свидетельство о внесении сведений в государственный реестр прав на объекты, охраняемые авторским правом РК, № 1845 от 19 февраля 2019г.

Certificate of Registration

SOFTWARE WORK

REGISTRATION NUMBER: 610144539

TIMESTAMP: 2021-01-06 16:20:36 GMT

TITLE: COMPUTER PROGRAMS «AUTOMATED SYSTEM FOR INVESTIGATION THE THERMOPHYSICAL STATE OF THE ROD – ASIR 2.0

WORK'S FILE: computer-programs-automated-system-for-investigation-the-thermophysical-state-of-the-rod-asir-20.docx[20210106_162036].zip

REGISTERED BY: TASHEV AZAT ARIPOVICH

YEAR OF CONCLUSION: 2021

LANGUAGE: RUSSIAN

PROGRAMMING LANGUAGES USED: PYTHON

AUTHORS (BIRTH / COUNTRY):
TASHEV AZAT ARIPOVICH (1953-01-08 / KAZAKHSTAN - ҚАЗАҚСТАН)
KUDAYKULOV ANARBAY (1951-05-12 / KAZAKHSTAN - ҚАЗАҚСТАН)
ARSHIDINOVA MUKADDAS TURGANOVNA (1974-11-07 / KAZAKHSTAN - ҚАЗАҚСТАН)
KAZYKHAN RYSGUL KYZMETKHANKYZY (1996-03-22 / KAZAKHSTAN - ҚАЗАҚСТАН)
TAKENOVA ZHANAR (1970-09-23 / KAZAKHSTAN - ҚАЗАҚСТАН)

:: WORK'S eDNA - ELECTRONIC IDENTIFIER ::

SHA512: 5f0f0948deedf2748c77c8a8d81c2152d27616fe15d5feeadd78353f6a9f7bd69f7551aba824a5b15
b1e0c1409aadff837087abaf62d00899e4971820d649993



WORKS COPYRIGHT
YOUR TALENT PROTECTED

Generated on 2021-01-06 16:22:10 GMT

Цифровая сертификация, юридически признанная Бернской конвенцией (США)
Сертификат регистрации авторского права программного обеспечения
№ 610144539 «Works Copyright», 2021-06-01



Авторское свидетельство о внесении сведений в государственный реестр прав на объекты, охраняемые авторским правом РК, № 42744 от 5 февраля 2024г.

ПРИЛОЖЕНИЕ В - Акт внедрения

ТеплоСнаб

Рег. № 148/исх
" 12 " 09 2023 г.

Республика Казахстан, 010000
г. Астана, р-н Алматы, ул. Жетіген
27А
т. 7 (7172) 48-11-33
e-mail: teplosnab-ns@mail.ru
БИН 080840015358
ИНК KZ426017111000005728

в АО "Народный банк Казахстана" г. Астана
БИК HSBKZZKX

АКТ внедрения результатов работ

Разработанные Аршидиновой Мукаддас Тургановной вычислительные алгоритмы, программы для нахождения температурного поля в стержне переменного сечения ограниченной длины, а также термомеханических параметров стержня при эксплуатации, составленные на языке программирования Python применяются для исследования термомеханических процессов в стержне переменного сечения при одновременном воздействии локальных источников тепла, тепловых потоков, температур и теплообмене. Применены вариационный метод, метод конечных элементов. Практическая значимость состоит в полученных точных результатах разработанных алгоритмов и программных средств оценки распределения температуры стержня в реальном времени.

Положительный экономический эффект обусловлен предварительным прогнозом и повышением надежности термомеханических характеристик деталей устройств под воздействием различных источников тепла с помощью программного обеспечения ASIR 2.0.

С уважением,
Директор
ТОО «ТеплоСнаб»
+7 702 765 01 91



Кабытаев Д.З.

Жауапкершілігі Шектеулі Серіктестігі
160019, Шымкент қ., Энергетиктер к.1160000
РНН 582100249565, БИН 050740003632.Кбс17.
Фил.ДБ АҚ «Сбербанк» Шымкент қ.
ЖСК КЗ12914122 203КЗ 0026К(КЗТ)
БКСАВРКЗКА
Тел. 8(7252)50-53-50,50-54-16
Факс.8(7252)50-53-59



Товарищество с Ограниченной Ответственностью
г. Шымкент, ул. Энергетиков 1
РНН 582100249565, БИН 050740003632.Кбс17.
Фил.ДБ АҚ «Сбербанк» Шымкент.
ЖСК КЗ12914122 203КЗ 0026К(КЗТ)
БКСАВРКЗКА
Тел. 8(7252)50-53-50,50-54-16
Факс.8(7252)50-53-59

ОҚТУСІК ЖАРЫҚ ТРАНЗИТ

Исх.№ 776 от 17.10 2023 г.

АКТ внедрения результатов работ

Разработанной Аршидиновой Мукаддас Тургановны вычислительные алгоритмы, программы для решения уравнения теплопроводности и АСУ теплофизическим состоянием стержня при эксплуатации, составленные на языке программирования Python применяются для исследования теплофизических характеристик по длине стержня переменного сечения с использованием вариационных подходов. Применены методы математической физики, дифференциальных и интегральных уравнений, методы вычислений. Практическая значимость состоит в разработке алгоритмов и программных средств оценки распределения температуры стержня в реальном времени.

Положительный экономический эффект обусловлен стимулированием повышения спроса на рынке программных средств предварительного прогноза изменения температуры в деталях конструкций.

Заместитель начальника
Туркестанского РЭС



Д.Карсыбеков

ПРИЛОЖЕНИЕ Г - Сертификат научной стажировки



KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ

August 28, 2018

CERTIFICATE of PARTICIPATION

This is to confirm that Mukaddas Arshidinova was a postgraduate student intern at Mechanical Engineering Department, Engineering Faculty, Kocaeli University, TURKEY from 16 June to 29 August, 2018. She conducted research about "Development and research of computational algorithms and programs for evaluation and modeling of thermophysical processes in rods of variable cross-section".



Müslüm ARICI

Associate Professor of Thermodynamics and Heat Technique Division
E-mail: muslumarici@kocaeli.edu.tr

Phone: (+90) 262 303 3452